

|||| eNote 113

Symmetriske matricer

Vi ser på matricer A , der er kvadratformede og symmetriske; \mathbf{A} altså en $(n \times n)$ –matrix for $n \geq 2$, se TransferNote ??, og desuden er $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Der forudsættes kendskab til matrixalgebra (??), determinant-begrebet (??), lineære afbildninger af det Euklidiske vektorrum (\mathbb{R}^n, \cdot) ind i sig selv, det tilhørende egenværdi- og egenvektorproblem, REFERENCE ?? og Gram–Schmidt ortonormalisering i givne udspændte underrum af (\mathbb{R}^n, \cdot) med det inducerede skalarprodukt.

113.1 Det Euklidiske vektorrum (\mathbb{R}^n, \cdot)

I vektorrummet \mathbb{R}^n indføres et indre produkt, et skalarprodukt, som er en naturlig generalisering af det velkendte skalarprodukt fra plangeometri.

|||| Definition 113.1

Lad \mathbf{a} og \mathbf{b} være to givne vektorer i \mathbb{R}^n med koordinaterne (a_1, \dots, a_n) og (b_1, \dots, b_n) med hensyn til den sædvanlige basis i \mathbb{R}^n . Så definerer vi **skalarproduktet, det indre produkt**, af de to vektorer på følgende måde:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad . \quad (113-1)$$

Når \mathbb{R}^n udstyres med dette (sædvanlige, naturlige) valg af skalarprodukt er (\mathbb{R}^n, \cdot) dermed et eksempel på et såkaldt **Euklidisk vektorrum**, eller **vektorrum med indre produkt**; se den generelle definition i REFERENCE ??.



Skalarproduktet kan udtrykkes ved matrix-produktet:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}_e\mathbf{a}^T \cdot {}_e\mathbf{b} = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (113-2)$$

Hovedpointen ved indførelsen af et skalarprodukt er, at vi nu kan tale om længder af vektorerne i det givne vektorrum, her \mathbb{R}^n :

||| Definition 113.2

Lad \mathbf{a} være en vektor i \mathbb{R}^n med koordinaterne (a_1, \dots, a_n) med hensyn til den sædvanlige basis i \mathbb{R}^n . Så er *længden af \mathbf{a}* defineret ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (113-3)$$

Længden af \mathbf{a} kaldes også *normen af \mathbf{a}* med hensyn til skalarproduktet i (\mathbb{R}^n, \cdot) . En vektor \mathbf{a} kaldes en *egentlig vektor*, hvis $|\mathbf{a}| > 0$, dvs. hvis $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Vinklen mellem to vektorer i \mathbb{R}^n defineres tilsvarende:

||| Definition 113.3

Lad \mathbf{a} og \mathbf{b} være to givne egentlige vektorer i \mathbb{R}^n med koordinaterne (a_1, \dots, a_n) og (b_1, \dots, b_n) med hensyn til den sædvanlige basis i \mathbb{R}^n . Så er *vinklen mellem \mathbf{a} og \mathbf{b}* defineret ved den værdi af θ i intervallet $[0, \pi]$ som opfylder

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (113-4)$$

Hvis $\cos(\theta) = 0$, altså hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ siger vi, at de to vektorer er *ortogonale*.

113.2 Beregning af skalarprodukt i en anden basis

Hvis vi benytter en anden basis end den sædvanlige i (\mathbb{R}^n, \cdot) , hvad er så skalarproduktet af to vektorer med hensyn til denne nye basis i \mathbb{R}^n , altså hvordan ser udtrykket for skalarproduktet ud i koordinaterne for vektorerne med hensyn til den nye basis? Det

vil vi nu undersøge.

Lad altså $\{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n\}$ betegne en basis i \mathbb{R}^n , og lad $\mathbf{a} = {}_{\mathbf{d}}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ betegne koordinaterne for \mathbf{a} med hensyn til basis $\{\mathbf{d}\}$ og tilsvarende $\mathbf{b} = {}_{\mathbf{d}}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ koordinaterne for \mathbf{b} med hensyn til basis $\{\mathbf{d}\}$.

Vi lader $\mathbf{P} = {}_{\mathbf{e}}\mathbf{P}_{\mathbf{d}}$ betegne koordinatskifte-matricen fra $\{\mathbf{d}\}$ til $\{\mathbf{e}\}$ koordinater:

$$\mathbf{P} = [{}_{\mathbf{e}}\mathbf{d}_1 \ {}_{\mathbf{e}}\mathbf{d}_2 \ \dots \ {}_{\mathbf{e}}\mathbf{d}_n] \quad , \quad (113-5)$$

hvor ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{d}_1$ betegner koordinatsøjlen indeholdende \mathbf{d}_1 's koordinater med hensyn til basis $\{\mathbf{e}\}$, således at

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} &= \mathbf{P}({}_{\mathbf{d}}\mathbf{a}) \\ {}_{\mathbf{e}}\mathbf{b} &= \mathbf{P}({}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}) \quad , \end{aligned} \quad (113-6)$$

sådan at skalarproduktet er

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= ({}_{\mathbf{e}}\mathbf{a})^\top ({}_{\mathbf{e}}\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{P}_{\mathbf{d}}\mathbf{a})^\top (\mathbf{P}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}) \\ &= ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{a}^\top) (\mathbf{P}^\top \mathbf{P}) ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}) \\ &= [\tilde{a}_1 \ \tilde{a}_2 \ \dots \ \tilde{a}_n] (\mathbf{P}^\top \mathbf{P}) \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (113-7)$$

Det vil sige, at skalarproduktet i (\mathbb{R}^n, \cdot) kan beregnes med hensyn til en vilkårlig basis ved brug af basis-skift-matricen som vist ovenfor via matricen $\mathbf{G} = \mathbf{P}^\top \mathbf{P}$. Elementerne g_{ij} i matricen \mathbf{G} findes let ved at bruge skalarprodukt-omskrivningen ovenfor på for eksempel de to vektorer \mathbf{d}_2 og \mathbf{d}_3 :

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{d}_3 = [0 \ 1 \ \dots \ 0] \mathbf{G} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = g_{23} \quad . \quad (113-8)$$

På samme måde får vi for alle andre valg af i og j at: $g_{ij} = \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j$.



Specielt følger det af ovenstående, at hvis de nye vektorer i den nye basis $\{\mathbf{d}\}$ alle er parvis ortogonale og har længden 1, så er $\mathbf{G} = \mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{E}_{n \times n}$, og i en sådan basis er skalarproduktet udtrykt ved samme simple koordinatformel som i den sædvanlige basis. Det er derfor at foretrække at arbejde i sådanne baser.

|||| Definition 113.4

Ortogonal matrix og egenskaberne, se nedenfor, copy to here.

113.3 Gram–Schmidt ortonormalisering

Vi beskriver her en procedure til at bestemme en ortonormal basis i et underrum af vektorrummet (\mathbb{R}^n, \cdot) . Lad U være et p –dimensionalt underrum af \mathbb{R}^n ; vi antager, at U er udspændt af p givne lineært uafhængige vektorer $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$, som altså derved udgør en basis $\{\mathbf{u}\}$ for U . Proceduren går ud på at konstruere en ny basis $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ for underrummet U ud fra den givne basis $\{\mathbf{u}\}$ sådan at de nye vektorer er *parvis ortogonale og har længden 1*.

||| Metode 113.5

Gram–Schmidt ortonormalisering af p lineært uafhængige vektorer $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p$ i (\mathbb{R}^n, \cdot) :

1. Begynd med at normere \mathbf{u}_1 og kald resultatet \mathbf{v}_1 , dvs.:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} . \quad (113-9)$$

2. Den næste \mathbf{v} -vektor \mathbf{v}_2 vælges nu i $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ men sådan at det samtidig sikres, at \mathbf{v}_2 er ortogonal på \mathbf{v}_1 , altså $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$; til sidst normeres. (Først konstrueres en *hjelpevektor* \mathbf{w}_2 .)

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} . \end{aligned} \quad (113-10)$$

Læg mærke til, at \mathbf{w}_2 (og derfor også \mathbf{v}_2) så er ortogonal på \mathbf{v}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 &= (\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) |\mathbf{v}_1|^2 \\ &= \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (113-11)$$

3. Således fortsættes

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i &= \mathbf{u}_i - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 - \dots - (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1}) \mathbf{v}_{i-1} \\ \mathbf{v}_i &= \frac{\mathbf{w}_i}{|\mathbf{w}_i|} . \end{aligned} \quad (113-12)$$

4. Indtil sidste vektor \mathbf{u}_p er brugt:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_p &= \mathbf{u}_p - (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 - \dots - (\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}) \mathbf{v}_{p-1} \\ \mathbf{v}_p &= \frac{\mathbf{w}_p}{|\mathbf{w}_p|} . \end{aligned} \quad (113-13)$$

De konstruerede vektorer udspænder samme underrum U som de givne lineært uafhængige vektorer, $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ og $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ udgør en ortogonal basis for U .

||| Eksempel 113.6

I (\mathbb{R}^4, \cdot) vil vi ved hjælp af Gram-Schmidt ortonormaliserings-metoden finde en ortonormal basis $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \}$ for det 3-dimensionale underrum U , der er udspændt af de tre givne lineært uafhængige (!) vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}(2, 2, 4, 1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}(0, 0, -5, -5) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}(5, 3, 3, -3) \quad .$$

Vi konstruerer de nye basisvektorer med hensyn til den sædvanlige basis $\{\mathbf{e}\}$ i \mathbb{R}^4 ved at gå igennem ortonormaliseringsproceduren (der er 3 'step' da der i dette eksempel er 3 lineært uafhængige vektorer i U):

1.

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{1}{5}(2, 2, 4, 1) \quad . \quad (113-14)$$

2.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{v}_1 = (2, 2, -1, -4) \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{|\mathbf{w}_2|} = \frac{1}{5}(2, 2, -1, -4) \quad . \end{aligned} \quad (113-15)$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - 5\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\mathbf{w}_3}{|\mathbf{w}_3|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) \quad . \end{aligned} \quad (113-16)$$

Vi har dermed konstrueret en ortonormal basis for underrummet U bestående af de vektorer, der med hensyn til den sædvanlige basis har koordinaterne:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}(2, 2, 4, 1) \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}(2, 2, -1, -4) \quad , \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0) \quad .$$

Vi kan checke, at der virkelig er tale om en ortonormal basis ved at stille vektorerne op som søjler i en matrix, som dermed får typen (4×3) således :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/\sqrt{2} \\ 2/5 & 2/5 & -1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix} \quad (113-17)$$

Matricen \mathbf{V} kan ikke være en ortogonal matrix (på grund af typen), men alligevel kan \mathbf{V} tilfredsstille følgende ligning, som viser, at de tre nye basisvektorer netop er parvis ortogonale og alle har længden 1 !

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \cdot \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 4/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 & -4/5 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/\sqrt{2} \\ 2/5 & 2/5 & -1/\sqrt{2} \\ 4/5 & -1/5 & 0 \\ 1/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (113-18)$$

||| Opgave 113.7

I (\mathbb{R}^4, \cdot) er givet følgende vektorer med hensyn til den sædvanlige basis $\{\mathbf{e}\}$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}(1, 1, 1, 1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}(3, 1, 1, 3) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}(2, 0, -2, 4) \quad , \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{e}(1, 1, -1, 3) \quad .$$

Vi lader U betegne det underrum i (\mathbb{R}^4, \cdot) , som er udspændt af de fire givne vektorer, altså

$$U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} \quad . \quad (113-19)$$

1. Vis, at $\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ er en basis for U , og find koordinaterne for \mathbf{u}_4 med hensyn til denne basis.
2. Angiv en ortonormal basis for U .

||| Eksempel 113.8

I (\mathbb{R}^3, \cdot) kræves en given første enheds-vektor \mathbf{v}_1 benyttet til en ny ortonormal basis $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ og opgaven er at finde de to andre vektorer til basen. Lad os antage at den givne vektor er $\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4)/5$. Det ses umiddelbart, at f.eks. $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ er en enhedsvektor, der er ortogonal på \mathbf{v}_1 . En sidste vektor til den ortonormale basis kan så findes direkte ved brug af krydsproduktet: $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (4, -3, 0)/5$.

113.4 Det ortogonale komplement til et underrum

Lad U være et underrum i (\mathbb{R}^n, \cdot) , som er udspændt af p givne lineært uafhængige vektorer, $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$. Mængden af de vektorer i (\mathbb{R}^n, \cdot) som hver for sig er ortogonal på samtlige vektorer i U er selv et underrum i (\mathbb{R}^n, \cdot) , og det har dimensionen $n - p$:

||| Definition 113.9

Det *ortogonale komplement* til et underrum U i (\mathbb{R}^n, \cdot) betegnes med U^\perp og består af alle vektorer i (\mathbb{R}^n, \cdot) som er ortogonale på hver eneste vektor i U :

$$U^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ for alle } \mathbf{u} \in U\} \quad (113-20)$$

||| Sætning 113.10

Det ortogonale komplement U^\perp til et givet p -dimensionalt underrum U i (\mathbb{R}^n, \cdot) er selv et underrum i (\mathbb{R}^n, \cdot) og det har dimensionen $\dim(U^\perp) = n - p$.

||| Bevis

Det er let at checke alle underrums-egenskaberne for U^\perp ; det er klart, at hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er ortogonale på alle vektorerne i U og k er et reelt tal, så er $\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ også ortogonal på alle vektorerne i U . Da den eneste vektor, der er ortogonal på sig selv er $\mathbf{0}$ er dette også den eneste vektor i fællesmængden: $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Hvis vi lader $\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ betegne en *ortonormal basis* for U og $\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ en ortonormal basis for U^\perp , så er $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ en ortonormal basis for underrummet $S = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r\}$ i \mathbb{R}^n . Hvis vi nu antager, at S ikke er hele \mathbb{R}^n , så kan basen for S udvides med mindst én vektor så det udvidede system er lineært uafhængig i \mathbb{R}^n ; dermed får vi - ved at bruge det sidste step i Gram-Schmidt metoden - en ny vektor, som er ortogonal på alle vektorer i U men som ikke er element i U^\perp ; og det er en modstrid, fordi U^\perp er defineret til at være *alle* de vektorer i \mathbb{R}^n , som er ortogonal på hver enkelt vektor i U . Derfor er antagelsen om, at S ikke er hele \mathbb{R}^n forkert. Det vil sige, at $S = \mathbb{R}^n$ og derfor $r + p = n$, sådan at $\dim(U^\perp) = r = n - p$; og det var det vi skulle vise. ■

||| Eksempel 113.11

Det ortogonale komplement til $U = \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ i \mathbb{R}^3 (for lineært uafhængige vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b}) er $U^\perp = \text{span}\{\mathbf{a} \times \mathbf{b}\}$.

||| Opgave 113.12

Bestem det ortogonale komplement til underrummet $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ i (\mathbb{R}^4, \cdot) , når de udspændende vektorer er givet ved deres respektive koordinater med hensyn til den sædvanlige basis $\{\mathbf{e}\}$ i \mathbb{R}^4 således:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}(1, 1, 1, 1) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}(3, 1, 1, 3) \quad , \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}(2, 0, -2, 4) \quad . \quad (113-21)$$

113.5 Lineære afbildninger af (\mathbb{R}^n, \cdot) ind i (\mathbb{R}^n, \cdot)

En lineær afbildning f af (\mathbb{R}^n, \cdot) ind i sig selv vil typisk ændre længder af vektorer og vinkler mellem vektorer; givet to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} hvad er så relationen mellem $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b})$?

Som bekendt kan den lineære afbildning repræsenteres ved en matrix \mathbf{F} med hensyn til en given basis i (\mathbb{R}^n, \cdot) . Lad os vælge den sædvanlige basis $\{\mathbf{e}\}$. Så er f repræsenteret ved $\mathbf{F} = \mathbf{e}\mathbf{F}\mathbf{e}$ og

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) &= (\mathbf{F}\mathbf{e}\mathbf{a})^\top \cdot (\mathbf{F}\mathbf{e}\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{e}\mathbf{a})^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{F} (\mathbf{e}\mathbf{b}) \quad . \end{aligned} \quad (113-22)$$

|||| Definition 113.13

En lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ kaldes en *isometri* hvis der for alle vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} i \mathbb{R}^n gælder:

$$f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad . \quad (113-23)$$

|||| Sætning 113.14

En lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ er en isometri hvis og kun hvis dens afbildningsmatrix $\mathbf{F} = \mathbf{d}\mathbf{F}\mathbf{d}$ med hensyn til en *vilkårlig ortogonal basis* $\{\mathbf{d}\}$ for (\mathbb{R}^n, \cdot) er ortogonal.

|||| Bevis

Det følger af ligning (113-22), at $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ for alle \mathbf{a} og \mathbf{b} hvis og kun hvis $\mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \mathbf{E}_{n \times n}$, når \mathbf{F} er matricen for f med hensyn til den sædvanlige basis $\{\mathbf{e}\}$. Lad så $\{\mathbf{d}\}$ være en vilkårlig anden ortonormal basis, og lad \mathbf{D} betegne den tilhørende ortogonale(!) basisskiftmatrix. Med hensyn til den nye basis er afbildningsmatricen for f givet ved $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D} = \mathbf{D}^\top \mathbf{F} \mathbf{D}$, og den matrix er ortogonal hvis og kun hvis \mathbf{F} er ortogonal fordi:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}^\top \mathbf{F} \mathbf{D})^\top (\mathbf{D}^\top \mathbf{F} \mathbf{D}) &= (\mathbf{D}^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{D}) (\mathbf{D}^\top \mathbf{F} \mathbf{D}) \\ &= \mathbf{D}^\top \mathbf{F}^\top \mathbf{F} \mathbf{D} \quad , \end{aligned} \quad (113-24)$$

og det sidste udtryk er netop enhedsmatricen $\mathbf{E}_{n \times n}$ hvis og kun hvis \mathbf{F} er ortogonal. ■

En isometri bevarer længder af vektorer og vinkler mellem vektorer:

||| Opgave 113.15

Lad $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ være en isometri. Vis, at så er $|f(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|$ for alle vektorer $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

||| Opgave 113.16

Lad $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ være en isometri. Lad \mathbf{a} og \mathbf{b} være to egentlige vektorer i \mathbb{R}^n og lad θ være vinklen mellem \mathbf{a} og \mathbf{b} . Vis, at så er vinklen mellem $f(\mathbf{a})$ og $f(\mathbf{b})$ også den samme vinkel θ .

Længde-bevarelse er karakteristisk for isometrier:

||| Sætning 113.17

Hvis alle vektorer bevarer deres længde ved en lineær afbildning f , så er f en isometri.

||| Bevis

Vektor-summen $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ har samme længde som sit billede, så der gælder:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ ((f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})) \cdot (f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}))) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{a}) + 2f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) + f(\mathbf{b}) \cdot f(\mathbf{b}) &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \\ |f(\mathbf{a})|^2 + 2f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) + |f(\mathbf{b})|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned} \tag{113-25}$$

og da vi også har pr. antagelse, at $|f(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|$ og $|f(\mathbf{b})| = |\mathbf{b}|$ så får vi af den sidste ligning i (113-25) ovenfor: $f(\mathbf{a}) \cdot f(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, og det var det, vi skulle vise.

■



Vinkel-bevarelse er derimod *ikke* forbeholdt isometrier; giv et eksempel på en lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ som bevarer vinkler mellem vektorer, men som ikke er en isometri. Vink: Prøv at gange med en konstant.

113.6 Symmetriske afbildninger af (\mathbb{R}^n, \cdot) ind i (\mathbb{R}^n, \cdot)

En meget vigtig klasse af lineære afbildninger af (\mathbb{R}^n, \cdot) ind i sig selv er de symmetriske:

||| Definition 113.18

En lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ siges at være *symmetrisk* hvis der gælder at

$$f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot f(\mathbf{b}) \quad \text{for alle } \mathbf{a} \text{ og } \mathbf{b} \text{ i } \mathbb{R}^n. \quad (113-26)$$

Vi kender symmetri-begrebet for kvadratformede matricer:

||| Definition 113.19

En kvadratformet matrix \mathbf{A} er *symmetrisk* hvis den er lig med sin egen transponerede

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top, \quad (113-27)$$


altså hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle elementerne i matricen.

Der er en simpel sammenhæng mellem symmetriske matricer og symmetriske afbildninger - hvis vi vel at mærke benytter *ortonormale baser* til at beskrive afbildningerne:

||| Sætning 113.20

Lad $\mathbf{F} = {}_{\mathbf{d}}\mathbf{F}_{\mathbf{d}}$ betegne matricen for en given lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ med hensyn til en ortonormal basis $\{\mathbf{d}\}$. Så er \mathbf{F} en symmetrisk matrix hvis og kun hvis f er en symmetrisk afbildning.

||| Bevis

Vi lader ${}_{\mathbf{d}}\mathbf{a} = {}_{\mathbf{d}}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n)$ og ${}_{\mathbf{d}}\mathbf{b} = {}_{\mathbf{d}}(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)$ betegne koordinaterne for to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} med hensyn til den ortonormale basis $\{\mathbf{d}\}$. Da basen er ortonormal kan vi beregne skalarprodukter med den sædvanlige koordinatformel, se  113.2. Vi har derfor:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{F} {}_{\mathbf{d}}\mathbf{a})^\top ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}) = ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{a})^\top \mathbf{F}^\top ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}), \text{ og} \\ \mathbf{a} \cdot f(\mathbf{b}) &= ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{a})^\top (\mathbf{F} {}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}) = ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{a})^\top \mathbf{F} ({}_{\mathbf{d}}\mathbf{b}), \end{aligned} \quad (113-28)$$

hvoraf følger, at $f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot f(\mathbf{b})$ for alle \mathbf{a} og \mathbf{b} hvis og kun hvis $\mathbf{F}^\top = \mathbf{F}$; og det var det vi skulle vise.

■

113.7 Lineære afbildninger af underrum ind i sig selv

Ved en lineær afbildning $f : (\mathbb{R}^n, \cdot) \mapsto (\mathbb{R}^n, \cdot)$ afbildes et underrum U ind i et underrum $f(U)$. Hvis vi kun er interesserede i hvordan f virker på vektorerne i U , og hvis $f(u)$ er indeholdt i U , og hvis dimensionen af U er p , så kan vi beskrive **restriktionen** $f|_U$ af f til U ved en $(p \times p)$ -matrix. Hvis f er symmetrisk, så er restriktionen $f|_U$ også symmetrisk (i betydningen $f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot f(\mathbf{b})$ for alle \mathbf{a} og \mathbf{b} i U) og $f|_U$ er med hensyn til en ortonormal basis i U givet ved en symmetrisk $(p \times p)$ -matrix $\mathbf{F}|_U$.

Det vil sige, at (U, \cdot) kan betragtes i helt sin egen ret som et selvstændigt vektorrum med indre produkt (skalar produkt) og som domæne for studiet af lineære afbildninger og egenværdiproblemer. Alle beregninger kan foretages med $(p \times p)$ -matricer.

|||| Eksempel 113.21

LLL

113.8 Indledning

|||| Definition 113.22

En kvadratformet matrix \mathbf{A} er *symmetrisk* hvis den er lig med sin egen transponerede

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top, \quad (113-29)$$

altså hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle elementer i matricen.

|||| Sætning 113.23

Lad \mathbf{v} og \mathbf{w} betegne to vektorer i vektorrummet \mathbb{R}^n med det sædvanlige skalarprodukt. Hvis \mathbf{A} er en $(n \times n)$ -matrix gælder

$$(\mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}^\top \mathbf{w}), \quad (113-30)$$

hvor prikproduktet er det sædvanlige i \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{q} = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n. \quad (113-31)$$

||| **Bevis**

Vi benytter, at prikproduktet kan udtrykkes ved et matrixprodukt:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{q} = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_n q_n = \mathbf{c}^\top \mathbf{q} \quad , \quad (113-32)$$

sådan at

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (\mathbf{A} \mathbf{v})^\top \mathbf{w} \\ &= (\mathbf{v}^\top \mathbf{A}^\top) \mathbf{w} \\ &= \mathbf{v}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}^\top \mathbf{w}) \quad . \end{aligned} \quad (113-33)$$

■

Det kan vi bruge til at karakterisere symmetriske matricer:

||| **Sætning 113.24**

En matrix \mathbf{A} er en symmetrisk $(n \times n)$ -matrix hvis og kun hvis

$$(\mathbf{A} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{w}) \quad (113-34)$$

for alle vektorer \mathbf{v} og \mathbf{w} i \mathbb{R}^n .

||| **Bevis**

Hvis \mathbf{A} er symmetrisk, så har vi at $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ og derfor ligning (113-34) direkte fra (113-30). Omvendt, hvis vi antager at (113-34) gælder for alle \mathbf{v} og \mathbf{w} , så skal vi vise, at \mathbf{A} er symmetrisk. Men det følger let ved blot at vælge passende vektorer, f.eks. $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ og $\mathbf{w} = \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$ og indsætte i (113-34) som nedenfor. Bemærk, at $\mathbf{A} \mathbf{e}_i$ er den i 'te søjle-vektor i \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 &= a_{23} \\ &= \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{A} \mathbf{e}_3) \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 \\ &= a_{32} \quad , \end{aligned} \quad (113-35)$$

sådan at $a_{23} = a_{32}$. Helt tilsvarende fås for alle andre valg af indices i og j at $a_{ij} = a_{ji}$ – og det var det vi skulle vise.

■

En basis i \mathbb{R}^n består (som bekendt fra TransferNote ??) af n lineært uafhængige vektor-

rer $\{a_1, \dots, a_n\}$. Hvis vektorerne derudover er parvis ortogonale og har længden 1 med hensyn til det sædvanlige prikprodukt, så er $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ en *ortonormal basis* for \mathbb{R}^n :

|||| Definition 113.25

En basis $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ er en *ortonormal basis* hvis

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{pmatrix} \quad (113-36)$$

|||| Opgave 113.26

Vis, at hvis n vektorer $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ i \mathbb{R}^n opfylder ligningen (113-36), så er $\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ automatisk en *basis* for \mathbb{R}^n , dvs. vektorerne er garanteret lineært uafhængige og udspænder hele \mathbb{R}^n .

|||| Eksempel 113.27

Vis, at følgende 3 vektorer $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ udgør en ortonormal basis $\{\mathbf{a}\}$ for \mathbb{R}^3 for enhver given værdi af $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (\cos(\theta), 0, -\sin(\theta)) \\ \mathbf{a}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{a}_3 &= (\sin(\theta), 0, \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (113-37)$$

Hvis vi sætter vektorerne fra en ortonormal basis ind som søjler i en matrix fås en *ortogonal matrix*:

|||| Definition 113.28

En $(n \times n)$ -matrix \mathbf{A} siges at være *ortogonal* hvis søjlevektorerne i \mathbf{A} udgør en ortonormal basis for \mathbb{R}^n , altså hvis søjlevektorerne er parvis ortogonale og alle har længden 1 som også udtrykt i ligning (113-36).



Bemærk, at *ortogonale matricer* alternativt (og måske mere betegnende) kunne kaldes *ortonormale*, idet søjlerne i matrixen ikke bare er parvis ortogonale men også normerede, så de alle har længde 1. Vi vil følge international skik og brug og kalder matrixerne ortogonale.

Det er let at checke om en given matrix er ortogonal:

||| Sætning 113.29

En $(n \times n)$ -matrix \mathbf{D} er ortogonal hvis og kun hvis

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{E}_{n \times n} \quad . \quad (113-38)$$

||| Bevis

Se TransferNote ?? definition ?? vedr. beregningen af matrixproduktet, og sammenlign dernæst med betingelsen for ortogonalitet i ligning (113-36). ■

Ortogonale matricer er *regulære*:

||| Opgave 113.30

Vis, at for at en matrix \mathbf{A} kan være ortogonal, så er det en nødvendig betingelse at

$$|\det(\mathbf{A})| = 1 \quad . \quad (113-39)$$

Vis at den betingelse ikke er tilstrækkelig, altså at der findes matricer, som opfylder denne determinant-betingelse, men som ikke er ortogonale.

||| Opgave 113.31

Vis, at en given $(n \times n)$ -matrix \mathbf{D} er ortogonal hvis og kun hvis

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^{-1} \quad . \quad (113-40)$$

||| Definition 113.32

En ortonormal matrix \mathbf{D} kaldes *positiv ortogonal* hvis $\det(\mathbf{D}) > 0$ og den kaldes *negativ ortogonal* hvis $\det(\mathbf{D}) < 0$. Læg mærke til, at determinanten af en ortogonal matrix aldrig er 0, så alle ortogonale matricer er enten positive eller negative.

||| Opgave 113.33

Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 0 & -a \\ -a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R} \quad . \quad (113-41)$$

Bestem de værdier af a for hvilke \mathbf{A} er ortogonal og angiv i hvert tilfælde om \mathbf{A} er positiv ortogonal eller negativ ortogonal.

113.9 Spektralsætningen for symmetriske matricer

Symmetriske matricer har lutter reelle egenverdier:

||| Sætning 113.34

Lad \mathbf{A} betegne en symmetrisk $(n \times n)$ -matrix. Så har det karakteristiske polynomium $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ for præcis n reelle rødder:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad . \quad (113-42)$$

Dvs. \mathbf{A} har n reelle egenverdier.



Hvis f.eks. $\{7, 3, 3, 2, 2, 2, 1\}$ er rødderne i $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ for en (7×7) -matrix \mathbf{A} , så skal disse rødder altså repræsenteres *med deres respektive multiplicitet* i egenverdi-listen:

$$\lambda_1 = 7 \geq \lambda_2 = 3 \geq \lambda_3 = 3 \geq \lambda_4 = 2 \geq \lambda_5 = 2 \geq \lambda_6 = 2 \geq \lambda_7 = 1 \quad .$$

Da sætning 113.34 udtrykker en helt afgørende egenskab ved symmetriske matricer, vil vi her give et bevis for den:

||| Bevis

Fra algebraens fundamentalsætning REFERENCE ved vi, at $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ har præcis n komplekse rødder - vi ved bare ikke om de er reelle; det er det vi skal vise. Så vi lader $\alpha + i\beta$ være en kompleks rod i $\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda)$ og skal så vise, at $\beta = 0$. Vi har altså

$$\det(\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\mathbf{E}) = 0 \quad , \quad (113-43)$$

og derfor også, at

$$\det(\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\mathbf{E}) \det(\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\mathbf{E}) = 0 \quad (113-44)$$

sådan at

$$\begin{aligned} \det((\mathbf{A} - (\alpha + i\beta)\mathbf{E})(\mathbf{A} - (\alpha - i\beta)\mathbf{E})) &= 0 \\ \det((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})^2 + \beta^2\mathbf{E}) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (113-45)$$

Den sidste ligning giver nu, at rangen af $((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})^2 + \beta^2\mathbf{E})$ er mindre end n ; det medfører nu via TransferNote TN2 REFERENCE, at der findes egentlige løsninger \mathbf{x} til det tilsvarende ligningssystem

$$((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})^2 + \beta^2\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad . \quad (113-46)$$

Lad os vælge sådan en egentlig løsning \mathbf{v} til (113-46) med $|\mathbf{v}| > 0$. Ved at benytte, at \mathbf{A} antages at være symmetrisk har vi så:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})^2 + \beta^2\mathbf{E})\mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} \\ &= ((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})^2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + \beta^2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= ((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})\mathbf{v})((\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})\mathbf{v}) + \beta^2|\mathbf{v}| \\ &= |(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})\mathbf{v}|^2 + \beta^2|\mathbf{v}| \quad , \end{aligned} \quad (113-47)$$

men da $|\mathbf{v}| > 0$ så må vi konkludere, at $\beta = 0$, fordi ellers kan det sidste udtryk i ovenstående udledning ikke være 0; og det var det vi skulle vise. ■

||| Opgave 113.35

Hvor var det så lige, at vi *faktisk brugte* symmetrien af \mathbf{A} i ovenstående bevis?



Til hver egen værdi λ_i for en given matrix \mathbf{A} hører et egenvektorrum \mathcal{E}_{λ_i} , som er et større eller mindre underrum i \mathbb{R}^n cf. TransferNote REFERENCE. Hvis to eller flere egen værdier for en given matrix er ens, dvs. hvis der er tale om en multipel (f.eks. k gange) rod $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots \lambda_{i+k-1}$ i det karakteristiske polynomium, så er de tilhørende egenvektorrum selvfølgelig også ens: $\mathcal{E}_{\lambda_i} = \mathcal{E}_{\lambda_{i+1}} = \dots \mathcal{E}_{\lambda_{i+k-1}}$. Vi vil vise nedenfor i sætning 113.37 at for symmetriske matricer er dimensionen af det fælles egenvektorrum \mathcal{E}_{λ_i} præcis lig med multipliciteten k af egenvektoren λ_i .

Derimod, hvis to egen værdier λ_i og λ_j for en *symmetrisk* matrix er *forskellige*, så er de to tilhørende egenvektorrum *ortogonale*, $\mathcal{E}_{\lambda_i} \perp \mathcal{E}_{\lambda_j}$ i følgende forstand:

|||| Sætning 113.36

Lad \mathbf{A} være en symmetrisk matrix og lad λ_1 og λ_2 være to forskellige egenverdier for \mathbf{A} og lad \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 betegne to tilhørende egenvektorer. Så er $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

|||| Bevis

Da \mathbf{A} er symmetrisk har vi fra (113-34):

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{A}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}_2) \\ &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \lambda_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad , \end{aligned} \tag{113-48}$$

og da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ får vi derfor følgende konklusion: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, og det var det, vi skulle vise. ■

Vi kan nu formulere en af de oftest anvendte resultater for symmetriske matricer, *spektralsætningen for symmetriske matricer*, som af gode grunde også kaldes sætningen om *diagonalisering af symmetriske matricer*:

||| Sætning 113.37

Lad \mathbf{A} betegne en *symmetrisk* $(n \times n)$ -matrix. Så findes der en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} således at

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}^T\mathbf{A}\mathbf{D} \quad \text{er en diagonal-matrix} \quad . \quad (113-49)$$

Det vil sige, at en reel symmetrisk matrix kan diagonaliseres ved anvendelse af en positiv ortogonal substitution, se REFERENCE(substitution).

Diagonalmatricen konstrueres meget simpelt ud fra de n reelle egenverdier $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ for \mathbf{A} således:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} \quad , \quad (113-50)$$

Husk: En symmetrisk matrix har præcis n reelle egenverdier når vi tæller dem med multiplicitet.

Den positive ortogonale matrix \mathbf{D} konstrueres dernæst ved som søjler i matricen at bruge egenvektorer fra de tilhørende egenvektor-rom $\mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathcal{E}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{E}_{\lambda_n}$ i den rigtige rækkefølge:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n] \quad , \quad (113-51)$$

hvor $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{E}_{\lambda_1}, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{E}_{\lambda_2}, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{E}_{\lambda_n}$, idet valget af egenvektorer i de respektive egenvektorum foretages således at

1. De valgte egenvektorer hørende til samme egenverdi er ortogonale (brug Gram-Schmidt ortogonalisering i hvert fælles egenvektorum)
2. De valgte egenvektorer har alle længden 1 (ellers skal de bare normeres)
3. Den resulterende matrix \mathbf{D} er *positiv* ortogonal (hvis den ikke er det, så skift fortegn på én af de valgte egenvektorer)

At dette kan lade sig gøre følger af de ovenstående resultater og bemærkninger - vi angiver det konstruktive bevis nedenfor.

||| Bevis

Vi skal først bemærke, at hvis $\lambda_i = \lambda_j$, så er også $\mathcal{E}_{\lambda_i} = \mathcal{E}_{\lambda_j}$. Når først vi har fundet alle egenverdierne, så er problemet om der er et tilstrækkeligt antal tilhørende egenvektorer, der kan bruges til konstruktionen af \mathbf{D} og 'fylde \mathbf{D} ud'. Men det går lige præcis op: Specielt, hvis alle egenverdierne er forskellige, så fås sætningen direkte af sætning 113.36 på nær normeringen. Hvis ikke alle egenverdierne er ens, betragtes de enkelte egenvektorum hver for sig. I hvert enkelt egenvektorum hørende til forskellige egenverdier vælges en basis af egenvektorer, som ortonormaliseres med Gram-Schmidt metoden. Samlingen af alle basisvektorer, der derved konstrueres, er selv en ortonormal basis for det underrum U i \mathbb{R}^n , som er udspændt af alle egenvektorummene \mathcal{E}_{λ_i} hørende til de forskellige egenverdier. Her bruges det, at egenvektorer der hører til egenvektorum for to forskellige egenverdier er ortogonale, se sætningen 113.36 ovenfor.

Vi påstår, at underrummet U er *hele* \mathbb{R}^n , sådan at vi faktisk allerede er færdig med konstruktionen af den ortogonale basis til brug i matricen \mathbf{D} . Lad os nemlig prøve at antage, at U *ikke* er hele \mathbb{R}^n . Så har U et ortogonalt komplement U^\perp , som er et egentligt vektorrum i \mathbb{R}^n . Ved den symmetriske afbildning der har matricen \mathbf{A} med hensyn til den sædvanlige basis, afbildes U^\perp ind i sig selv og der er derfor mindst en egenvektor for \mathbf{A} i U^\perp , og det er jo i modstrid med, at vi allerede har brugt alle til rådighed værende egenvektorer for \mathbf{A} i konstruktionen af U . Derfor må U^\perp være tom og U fylder hele \mathbb{R}^n . ■

113.10 Eksempler

Her er nogle typiske eksempler der viser, hvordan man diagonaliserer passende små matricer:

||| Eksempel 113.38

En symmetrisk (3×3) -matrix \mathbf{A} er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} . \quad (113-52)$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} således at $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}^\top \mathbf{A} \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} . \quad (113-53)$$

Først bestemmes egenverdierne for \mathbf{A} : Det karakteristiske polynomium for \mathbf{A} er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda-1)^2 \cdot (7-\lambda) , \quad (113-54)$$

så \mathbf{A} har egenverdierne $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$, og $\lambda_3 = 1$. Dermed ved vi allerede nu via sætning 113.37, at det er muligt at konstruere en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} således at

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{diag}(7, 1, 1) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (113-55)$$

Resten af opgaven består nu i at finde de egenvektorer for \mathbf{A} der kan bruges som søjler i den ortogonale matrix \mathbf{D} .

Egenvektorerne for \mathbf{A} hørende til egenværdien $\lambda_1 = 7$ fås ved at løse det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_A(7) = \mathbf{A} - 7\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} , \quad (113-56)$$

som med passende rækkeoperationer ses at have

$$\text{trap}(\mathbf{K}_A(7)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (113-57)$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{e}(1, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, sådan at $\mathcal{E}_7 = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{6})(1, -2, 1)$ er derfor en ortonormal basis for \mathcal{E}_7 (og den kan altså bruges som første søjle vektor i den søgte \mathbf{D}):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & * & * \\ -2/\sqrt{6} & * & * \\ 1/\sqrt{6} & * & * \end{bmatrix} . \quad (113-58)$$

Vi ved fra sætning 113.37, at de to resterende søjler fås ved tilsvarende at finde alle egenvektorerne \mathcal{E}_1 hørende til egenværdien $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ og dernæst udvælge to ortonormale egenvektorer fra \mathcal{E}_1 .

Reduktionsmatricen hørende til egenværdien 1 er

$$\mathbf{K}_A(1) = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} , \quad (113-59)$$

som igen via passende rækkeoperationer ses at have

$$\text{trap}(\mathbf{K}_A(1)) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (113-60)$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til

$$\mathbf{u} = t_1 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + t_2 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad , \quad t_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad t_2 \in \mathbb{R} \quad , \quad (113-61)$$

sådan at $\mathcal{E}_1 = \text{span}\{\mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), \mathbf{e}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})\}$.

Vi finder en ortonormal basis for \mathcal{E}_1 ved hjælp af Gram-Schmidt ortonormalisering af $\text{span}\{\mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}), \mathbf{e}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0})\}$ således: Da vi allerede har defineret \mathbf{v}_1 sætter vi \mathbf{v}_2 til at være

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) / |\mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})| = (1/\sqrt{2})\mathbf{e}(\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad , \quad (113-62)$$

og dernæst, som i Gram-Schmidt proceduren:

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{e}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) - (\mathbf{e}(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{quad}. \quad (113-63)$$

Ved normering får vi derved endelig $\mathbf{v}_3 = (1/\sqrt{3}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ og dermed har vi alle ingredienserne til den søgte ortogonale matrix \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad . \quad (113-64)$$

Det skal til sidst undersøges, om de valgte egenvektorer giver en positiv ortogonal matrix. Da

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = -6 < 0 \quad , \quad (113-65)$$

er \mathbf{D} negativ ortogonal. En positiv ortogonal matrix fås ved at skifte fortegn på en af søjlerne i \mathbf{D} , eksempelvis den sidste. Bemærk, at en vektor \mathbf{v} er en egenvektor for \mathbf{A} hvis og kun hvis $-\mathbf{v}$ er en egenvektor for \mathbf{A} . Vi har altså, at

$$\mathbf{D} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 -\mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (113-66)$$

er en *positiv* ortogonal matrix, der diagonaliserer \mathbf{A} . Det eftervises let ved en direkte udregning:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} &= \mathbf{D}^\top \mathbf{A} \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (113-67)$$

Vi skal også til slut lige bemærke her, at i stedet for at bruge Gram-Schmidt til bestemmelse af \mathbf{v}_3 kunne vi have brugt krydsproduktet $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (se 113.8):

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{3})(-1, -1, -1) \quad . \quad (113-68)$$

||| Eksempel 113.39

En symmetrisk (2×2) -matrix \mathbf{A} er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} . \quad (113-69)$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} således at $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} . \quad (113-70)$$

Først bestemmes egenværdierne for \mathbf{A} : Det karakteristiske polynomium for \mathbf{A} er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ -12 & 4 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda - 20) \cdot (\lambda + 5) , \quad (113-71)$$

så \mathbf{A} har egenværdierne $\lambda_1 = 20$ og $\lambda_2 = -5$.

Egenvektorerne for \mathbf{A} hørende til egenværdien $\lambda_1 = 20$ fås ved at løse det homogene lignings-system, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(20) = \mathbf{A} - 20\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{bmatrix} , \quad (113-72)$$

som med passende rækkeoperationer ses at have den ækvivalente trappe-matrix:

$$\text{trap}(\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(20)) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (113-73)$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til $\mathbf{u} = t \cdot {}_e(4, -3)$, $t \in \mathbb{R}$, sådan at $\mathcal{E}_{20} = \text{span}\{(4, -3)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/5)(4, -3)$ er derfor en ortonormal basis for \mathcal{E}_{20} (og den kan altså bruges som første søjle vektor i den søgte \mathbf{D}):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4/5 & * \\ -3/5 & * \end{bmatrix} . \quad (113-74)$$

Den sidste søjle i \mathbf{D} er en egenvektor hørende til den anden egenværdi $\lambda_2 = -5$ og kan derfor findes ud fra den totale løsningsmængde \mathcal{E}_{-5} til det homogene ligningssystem, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(-5) = \mathbf{A} - 20 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} , \quad (113-75)$$

men da vi jo ved, at den søgte egenvektor er ortogonal på egenvektoren \mathbf{v}_1 , kan vi umiddelbart blot bruge tværvektoren, $\mathbf{v}_2 = (1/5)(3, 4)$, som klart er en enhedsvektor, der er ortogonal på \mathbf{v}_1 . Det er let at checke, at \mathbf{v}_2 er en egenvektor for \mathbf{A} hørende til egenværdien -5 :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(-5) \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (113-76)$$

Vi indsætter derfor \mathbf{v}_2 som anden søjle i \mathbf{D} og får

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} . \quad (113-77)$$

Denne matrix har determinanten $\det(\mathbf{D}) = 5 > 0$, så \mathbf{D} er en positiv ortogonal matrix, der opfylder at $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} &= \mathbf{D}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{diag}(20, -5) = \mathbf{\Lambda} . \end{aligned} \quad (113-78)$$

|||| Eksempel 113.40

En symmetrisk (3×3) -matrix \mathbf{A} er givet således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} . \quad (113-79)$$

Vi vil bestemme en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} således at $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$ er en diagonalmatrix:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} . \quad (113-80)$$

Først bestemmes egenverdierne for \mathbf{A} : Det karakteristiske polynomium for \mathbf{A} er

$$\mathcal{K}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right) = -(\lambda-3) \cdot (\lambda-6) \cdot (\lambda-9) , \quad (113-81)$$

hvoraf vi aflæser de tre forskellige egenverdier $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 6$, og $\lambda_3 = 3$ og dermed den diagonalmatrix vi på vej til at kunne skrive som $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(9, 6, 3) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (113-82)$$

Egenvektorerne for \mathbf{A} hørende til egenværdien $\lambda_1 = 3$ fås ved at løse det homogene lignings-system, der har koefficientmatricen

$$\mathbf{K}_{\mathbf{A}}(3) = \mathbf{A} - 3 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} , \quad (113-83)$$

som med passende rækkeoperationer ses at have

$$\text{trap}(\mathbf{K}_A(3)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (113-84)$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til $\mathbf{u}_3 = t \cdot \mathbf{e}(1, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$, sådan at $\mathcal{E}_3 = \text{span}\{(1, 2, 2)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_1 = (1/3)(1, 2, 2)$ er derfor en ortonormal basis for \mathcal{E}_3 og den kan altså bruges som *tredje søjle vektor* i den søgte \mathbf{D} ; bemærk nemlig, at vi netop har fundet egenvektorrummet til den *tredje egen værdi* i spektret for \mathbf{A} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} * & * & 1/3 \\ * & * & 2/3 \\ * & * & 2/3 \end{bmatrix} . \quad (113-85)$$

Vi ved fra sætning 113.37, at de to resterende søjler fås ved tilsvarende at finde egenvektorrummene \mathcal{E}_6 hørende til egen værdien $\lambda_2 = 6$, og egenvektorrummet \mathcal{E}_9 hørende til egen værdien $\lambda_1 = 9$.

For $\lambda_2 = 6$ har vi:

$$\mathbf{K}_A(6) = \mathbf{A} - 6 \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} , \quad (113-86)$$

som med passende rækkeoperationer ses at have følgende ækvivalente trappematrix:

$$\text{trap}(\mathbf{K}_A(6)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (113-87)$$

Egenvektor-løsningerne til det tilsvarende homogene ligningssystem aflæses til $\mathbf{u}_2 = t \cdot \mathbf{e}(-2, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$, sådan at $\mathcal{E}_6 = \text{span}\{(-2, -1, 2)\}$. Den normerede egenvektor $\mathbf{v}_2 = (1/3)(-2, -1, 2)$ er derfor en ortonormal basis for \mathcal{E}_6 (og den kan altså bruges som *anden søjle vektor* i den søgte \mathbf{D}):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} * & -2/3 & 1/3 \\ * & -1/3 & 2/3 \\ * & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} . \quad (113-88)$$

I stedet for på samme måde at bestemme egenvektorrummet \mathcal{E}_9 for den resterende egen værdi $\lambda_1 = 9$ benytter vi, at det egenvektorrum er udspændt af en vektor \mathbf{v}_1 , der er ortogonal på både \mathbf{v}_3 og \mathbf{v}_2 , altså kan vi bruge $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = (1/3)\mathbf{e}(-2, 2, -1)$, således at vi dermed endelig har

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} . \quad (113-89)$$

Denne matrix er positiv ortogonal fordi $\det(\mathbf{D}) = 1 > 0$, og dermed har vi bestemt en positiv ortogonal matrix \mathbf{D} , der diagonaliserer \mathbf{A} til diagonalmatricen $\mathbf{\Lambda}$. Det eftervises også let ved

en direkte udregning:

$$\mathbf{D}^{-1}\mathbf{AD} = \mathbf{D}^{\top}\mathbf{AD}$$

$$= \begin{bmatrix} -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad (113-90)$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{diag}(9, 6, 3) = \mathbf{\Lambda} \quad .$$

113.11 Opsummering

- Integrate
- For this
- Actually