

eNote 29

Komplekse tal...

I denne eNote introduceres og undersøges talmængden \mathbb{C} , de komplekse tal. Da \mathbb{C} betragtes som en udvidelse af \mathbb{R} forudsætter eNoten almindeligt kendskab til de reelle tal, herunder de elementære reelle funktioner som de trigonometriske funktioner og den naturlige eksponentialfunktion. Endelig forudsættes elementær kendskab til vektorer i planen.

29.1 Indledning

En simpel andengradsligning som

$$x^2 = 25$$

har to reelle løsninger, nemlig

$$x = 5 \text{ og } x = -5$$

idet

$$5^2 = 25 \text{ og } (-5)^2 = 25.$$

På tilsvarende vis har ligningen

$$x^2 = 2$$

to løsninger, nemlig

$$x = \sqrt{2} \text{ og } x = -\sqrt{2}$$

idet

$$\sqrt{2}^2 = 2 \text{ og } (-\sqrt{2})^2 = 2.$$

Med ligningen

$$x^2 = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

skal vi passe mere på, her afhænger alt nemlig af fortegnet på k . Hvis $k \geq 0$ har ligningen løsningerne

$$x = \sqrt{k} \text{ og } x = -\sqrt{k}$$

idet

$$\sqrt{k}^2 = k \text{ og } (-\sqrt{k})^2 = k.$$

Men hvis $k < 0$, har ligningen ingen løsninger, da der ikke findes reelle tal hvis kvadrat er negativt.

Men nu stiller vi os det spørgsmål, om man kunne forestille sig en større mængde af tal end de reelle, en mængde der indeholder alle de reelle tal og derudover også er løsninger til en ligning som

$$x^2 = -1.$$

Ligningen måtte da i analogi med de ovenstående ligninger have to løsninger

$$x = \sqrt{-1} \text{ og } x = -\sqrt{-1}.$$

Lad os være dristige og antage at dette faktisk er muligt, og kalde tallet $\sqrt{-1}$ for i . Ligningen

$$x^2 = -1$$

har da to løsninger, nemlig

$$x = i \text{ og } x = -i$$

idet

$$i^2 = \sqrt{-1}^2 = -1 \text{ og } (-i)^2 = (-\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Vi stiller nu det ekstra krav til det hypotetiske tal i at man skal kunne regne med det efter de samme regneregler som gælder de reelle tal. Man skal for eksempel kunne gange i med et reelt tal b og lægge denne størrelse til et andet reelt tal a . Herved opstår en ny slags tal z af typen

$$z = a + ib, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Nedenfor beskriver vi hvordan de nævnte ambitioner kan imødekommes. Vi ser på hvordan strukturen af en sådan større talmængde må være, og hvilke lovmæssigheder den indeholder. Talmængden kalder vi *de komplekse tal* og giver den symbolet \mathbb{C} . Der skal altså gælde at \mathbb{R} er en ægte delmængde af \mathbb{C} . Som allerede antydnet må \mathbb{C} være *to-dimensional* i den forstand at et komplekst tal indeholder to reelle tal!

29.2 Komplekse tal indført som reelle talpar

Den sædvanlige skrivemåde for et komplekst tal z er

$$z = a + ib \tag{29-1}$$

hvor a og b er reelle tal, og i er et nyt ”imaginært” tal der opfylder $i^2 = -1$. Denne form er særdeles praktisk ved regning med komplekse tal, og derfor den der oftest benyttes ved tekniske anvendelser. Men af teoretiske grunde kan vi ikke definere de komplekse tal ud fra formen (29-1). For hvad betyder egentlig et produkt som ib , og hvad betyder additionen $a + ib$?

En teoretisk tilfredsstillende måde at indføre komplekse tal på er som mængden af reelle talpar (a, b) . Vi vil i dette afsnit vise hvordan man i denne mængde kan definere regneoperationer (addition, subtraktion, multiplikation og division), der opfylder de sædvanlige regneregler fra reelle tal. Og som vil vise sig at give skrivemåden (29-1) fuld mening.



De komplekse tal \mathbb{C} defineres som mængden af ordnede reelle talpar:

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{29-2}$$

Som symbol for komplekse tal vil vi ofte bruge bogstavet z .



Her angives fem forskellige komplekse tal:

$$z_1 = (2, 7), \quad z_2 = (7, 2), \quad z_3 = (0, 1), \quad z_4 = (-5, 0), \quad z_5 = (0, 0).$$

Først indfører vi regnearten addition for komplekse tal. Derefter subtraktion som en særlig form for addition.



Lad $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ være to komplekse tal.

Summen $z_1 + z_2$ defineres ved

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \tag{29-3}$$



For de to komplekse tal $z_1 = (2, 7)$ og $z_2 = (4, -3)$ gælder

$$z_1 + z_2 = (2, 7) + (4, -3) = (2 + 4, 7 + (-3)) = (6, 4).$$

Det komplekse tal $(0, 0)$ er *neutralt* med hensyn til addition idet der for ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ gælder

$$z + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z.$$

Det er klart at $(0, 0)$ er det eneste komplekse tal som er neutralt med hensyn til addition.

For ethvert komplekst tal findes et *modsat* tal som adderet med z giver $(0, 0)$. Det komplekse tal $z = (a, b)$ har det modsatte tal $(-a, -b)$ idet

$$(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (a - a, b - b) = (0, 0).$$

Det er klart at $(-a, -b)$ er det eneste modsatte tal for $z = (a, b)$. Det entydigt bestemte modsatte tal til et komplekst tal z betegnes $-z$. Ved hjælp heraf kan subtraktion af komplekse tal indføres som en særlig form for addition.



For to komplekse tal z_1 og z_2 defineres differensen $z_1 - z_2$ ved summen af z_1 og *det modsatte tal* for z_2 :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \tag{29-4}$$

Lad os for to vilkårlige komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ beregne differensen $z_1 - z_2$ ud fra definition 29.5:

$$z_1 - z_2 = (a, b) + (-c, -d) = (a + (-c), b + (-d)) = (a - c, b - d).$$

Dette giver følgende enkle formel

$$z_1 - z_2 = (a - c, b - d). \tag{29-5}$$



For de to komplekse tal $z_1 = (5, 2)$ og $z_2 = (4, -3)$ gælder

$$z_1 - z_2 = (5 - 4, 2 - (-3)) = (1, 5).$$

Mens addition (og subtraktion) af komplekse tal synes enkel og naturlig, virker multiplikation (og division) af komplekse tal mere ejendommelig. Vi skal senere se at alle fire regningsarter har markante geometriske ækvivalenter i den såkaldte komplekse talplan. Men i første omgang må vi blot tage definitionerne for gode varer. Først giver vi definitionen på multiplikation. Derefter division som en særlig form for multiplikation.



Lad $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$ være to komplekse tal.

Produktet $z_1 z_2$ defineres ved

$$z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc). \tag{29-6}$$



For de to komplekse tal $z_1 = (2, 3)$ og $z_2 = (1, -4)$ gælder

$$z_1 z_2 = (2, 3) \cdot (1, -4) = (2 \cdot 1 - (3 \cdot (-4)), 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1) = (14, -5).$$

Det komplekse tal $(1, 0)$ er *neutralt* med hensyn til multiplikation idet der for ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ gælder

$$z \cdot (1, 0) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b) = z.$$

Det er klart at $(1, 0)$ er det eneste komplekse tal som er neutralt med hensyn til multiplikation.

For ethvert komplekst tal z som ikke er $(0, 0)$, findes et unikt *reciprokt* tal som ganget med det givne tal giver $(1, 0)$. Det betegnes $\frac{1}{z}$. Det komplekse tal $z = (a, b)$ har det reciprokke tal

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \tag{29-7}$$

idet

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$



Vis at ethvert komplekst tal $z \neq (0, 0)$ har netop ét reciprokt tal.

Ved hjælp af reciprokke tal kan vi nu indføre division som en særlig form for multiplikation.



Lad z_1 og z_2 være vilkårlige komplekse tal, hvor $z_2 \neq (0, 0)$.

Kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ defineres som produktet af z_1 og *det reciprokke tal* for z_2

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \tag{29-8}$$

Lad os for to vilkårlige komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d) \neq (0, 0)$ beregne kvotienten $\frac{z_1}{z_2}$ ud fra definition 29.10:

$$z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a, b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, -\frac{d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right).$$

Vi får hermed følgende formel for division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right). \tag{29-9}$$



Betragt de to komplekse tal $z_1 = (1, 2)$ og $z_2 = (3, 4)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{3^2 + 4^2}, \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2 + 4^2} \right) = \left(\frac{11}{25}, \frac{2}{25} \right).$$

Vi slutter afsnittet med at vise at de komplekse tal med de indførte regneoperationer opfylder regneregler kendt fra de reelle tal.



De komplekse tal overholder de følgende regneregler:

1. Kommutativ regel for addition: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Associativ regel for addition: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Tallet $(0, 0)$ er neutral mht. addition
4. Ethvert z har et modsat tal $-z$ hvor $z + (-z) = (0, 0)$
5. Kommutativ regel for multiplikation $z_1 z_2 = z_2 z_1$
6. Associativ regel for multiplikation: $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
7. Tallet $(1, 0)$ er neutralt mht. multiplikation
8. Ethvert $z \neq (0, 0)$ har et reciprokt tal $\frac{1}{z}$ hvor $z \cdot \frac{1}{z} = (1, 0)$
9. Distributiv regel: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$



Lad os se på den kommutative regel. Der er givet to komplekse tal $z_1 = (a, b)$ og $z_2 = (c, d)$. Der gælder

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = z_2 + z_1.$$

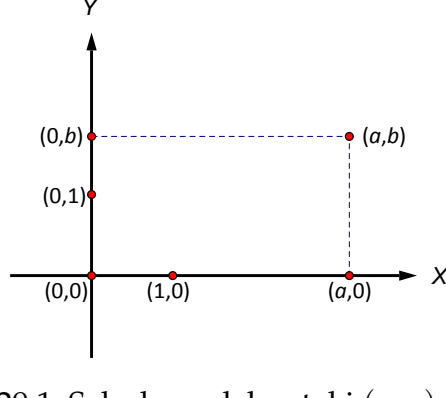
Ved det andet lighedstegn er der for både første- og andenkoordinat benyttet at den kommutative lov for addition gælder for de reelle tal. Dermed ses at den kommutative regel også gælder for komplekse tal.

I beviset for reglerne 2, 5, 6 og 9 udnyttes på samme måde, at de tilsvarende regler gælder for reelle tal. Detaljerne overlades til læseren. For reglerne 3, 4 og 7, 8 se gennemgangen tidligere i dette afsnit.



29.3 Komplekse tal på rektangulær form

Da der til ethvert ordnet reelt talpar svarer et unikt punkt i (x, y) -planen, og omvendt til ethvert punkt i (x, y) -planen svarer et unikt ordnet reelt talpar, kan \mathbb{C} opfattes som mængden af punkter i (x, y) -planen. På figur 29.1 er vist seks punkter i (x, y) -planen, det vil sige seks komplekse tal.



Figur 29.1: Seks komplekse tal i (x, y) -planen.

Vi vil i det følgende ændre skrivemåden for komplekse tal.

Først identificerer vi alle komplekse tal af typen $(a, 0)$, det vil sige de tal der ligger på x -aksen, med de tilsvarende reelle tal a . Specielt skrives tallet $(0, 0)$ som 0 og tallet $(1, 0)$ som 1. Bemærk at dette ikke fører til konflikt mellem de indførte regnearter for komplekse tal og de sædvanlige for reelle tal, idet

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$$

og

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0).$$

Derved kan x -aksen opfattes som en almindelig reel talakse og betegnes *realaksen*. Og på den måde kan de reelle tal ses som en delmængde af de komplekse. At y -aksen kaldes *imaginæraksen* hænger sammen med de forunderlige egenskaber for det komplekse tal i som vi nu skal indføre og undersøge.



Ved det komplekse tal i forstås tallet $(0, 1)$.



En afgørende motivation for indføringen af de komplekse tal var ønsket om en talmængde der indeholder en løsning på ligningen

$$x^2 = -1.$$

Med tallet i har vi fået en løsning idet der gælder

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1.$$



Ethvert komplekst tal $z = (a, b)$ kan skrives på formen

$$z = a + i \cdot b = a + ib. \quad (29-10)$$

Den skrivemåde kaldes *den rektangulære form* for z .



Beviset består i simple omregninger hvor den nye skrivemåde for tal af typen $(a, 0)$ indgår.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib.$$



Da $0 = (0, 0)$ er neutralt med hensyn addition, og $1 = (1, 0)$ er neutralt med hensyn multiplikation gælder følgende identiteter:

$$0 + z = z \text{ og } 1z = z.$$

Endvidere ses nemt at

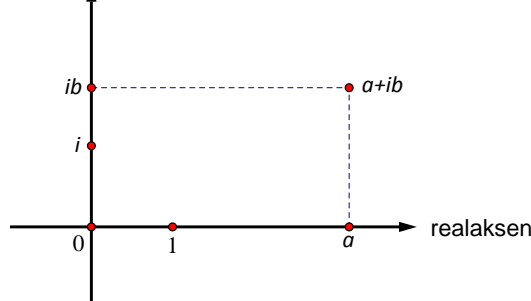
$$0z = 0.$$

Lad os specielt betragte komplekse tal af typen $(0, b)$. Da

$$(0, b) = 0 + ib = ib,$$

kan i forstås som y -aksens enhed, og man omtaler derfor i som *den imaginære enhed*. Heraf kommer betegnelsen *imaginæraksen* for y -aksen.

På figur 29.2 ses en opdatering af situationen fra figur 29.1 hvor de nævnte ændringer er benyttet.



Figur 29.2: Seks komplekse tal i den komplekse talplan.



En afgørende fordel ved den rektangulære form af komplekse tal er at man ikke behøver huske de formler for regneoperationerne addition, subtraktion, multiplikation og division, der blev givet i definitionerne 29.3, 29.5, 29.7 og 29.10. Alle udregninger kan nemlig udføres ved at man følger de sædvanlige regneregler for reelle tal, herunder at man behandler tallet i som man ville behandle en reel parameter og husker at erstatte i^2 med -1 .

I det følgende eksempel vises hvordan multiplikation kan udføres ved sædvanlig regning med faktorerens rektangulære form.



Vi *udregner* produktet af de to komplekse tal givet på rektangulær form $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Resultatet svarer til definitionen 29.7!



Bevis at den såkaldte *nulregel* for reelle tal også gælder for komplekse tal: Et produkt af to tal er 0 hvis og kun hvis mindst én af faktorerne er 0.



Egenskaben 6. i sætning 29.12 giver os mulighed for indføring af heltalspotenser for komplekse tal, der svarer til heltalige potenser for reelle tal. Lad i det følgende n betegne et naturligt tal.

1. $z^1 = z$; $z^2 = z \cdot z$; $z^3 = z \cdot z \cdot z$ og så videre.

2. Pr. definition sættes $z^0 = 1$.

3. Endelig sættes $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

De sædvanlige regneregler for heltalspotenser af reelle tal gælder også for de komplekse:

$$z^n z^m = z^{n+m} \text{ og } (z^n)^m = z^{nm}$$

Vi afslutter dette afsnit med at indføre begreberne realdel og imaginærdel for komplekse tal.



Givet et komplekst tal z med rektangulær form $z = a + ib$. Ved *realdelen* af z forstås det reelle tal

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + ib) = a, \quad (29-11)$$

og ved *imaginærdelen* af z forstås det reelle tal

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a + ib) = b. \quad (29-12)$$



Udtrykket *rektangulær* form hentyder til tallets placering i den komplekse talplan, hvor $\operatorname{Re}(z)$ er tallets vinkelrette nedfældningspunkt på realaksen, og $\operatorname{Im}(z)$ dets vinkelrette nedfældningspunkt på imaginæraksen. Realværdien er kort sagt tallets førstekoordinat, mens imaginærværdien er tallets andenkoordinat.

Bemærk at ethvert komplekst tal z kan opskrives på rektangulær form således

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z).$$



Tre komplekse tal er givet ved:

$$z_1 = 3 - 2i, \quad z_2 = i5, \quad z_3 = 25 + i.$$

Vi finder realdelen og imaginærdelen af tallene:

$$\operatorname{Re}(z_1) = 3, \operatorname{Im}(z_1) = -2; \operatorname{Re}(z_2) = 0, \operatorname{Im}(z_2) = 5; \operatorname{Re}(z_3) = 25, \operatorname{Im}(z_3) = 1. \quad (29-13)$$



To komplekse tal på rektangulær form er *ens*, hvis og kun hvis såvel deres realdele som deres imaginærdele er ens.

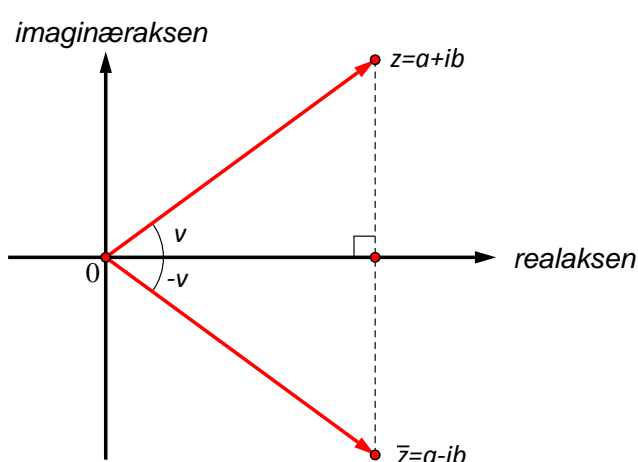
29.4 Konjugering af komplekse tal



Lad z være et komplekst tal med rektangulær form $z = a + ib$. Ved det konjugerede tal til z forstås det komplekse tal \bar{z} givet ved

$$\bar{z} = a - ib \quad (29-14)$$

At konjugere et komplekst tal svarer til at det spejles i realaksen som vist på figur 29.3.



Figur 29.3: Spejling i realaksen

Det er indlysende at det konjugerede tal til et konjugeret tal er det oprindelige tal selv:

$$\overline{\bar{z}} = z. \quad (29-15)$$

I det følgende eksempel finder vi en snild metode til omskrivning af en brøk til rektangulær form.



Vi kan nu opstille følgende huskeregel for omregning af en kompleks brøk til rektangulær form: *Forlæng brøken med nævneren konjugeret*. Den bygger på at produktet af et tal og dets konjugerede altid er et reelt tal (se om dette senere i eNoten: formel (29-19)).

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{1^2+1^2} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

For konjugering i forbindelse med de fire sædvanlige regnearter gælder der følgende meget simple regneregler



1. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
4. $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2, z_2 \neq 0.$



Beviset gennemføres ved simple omformninger ud fra tallenes rektangulære form. Som eksempel tager vi den første formel. Antag $z_1 = a_1 + ib_1$ og $z_2 = a_2 + ib_2$. Så gælder

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

■

Til sidst bemærker vi at alle komplekse tal på realaksen er identiske med deres konjugerede tal, og at de er de eneste komplekse tal der opfylder denne egenskab. Vi kan i forlængelse heraf opstille et kriterium for om et givet tal i en mængde af komplekse tal er reelt:



Lad A være en delmængde af \mathbb{C} , og lad $A_{\mathbb{R}}$ betegne den delmængde af A som består af reelle tal. Der gælder

$$A_{\mathbb{R}} = \{z \in A \mid \bar{z} = z\}.$$



Lad z være et vilkårligt tal i $A \subseteq \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = a + ib$. Der gælder da

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow a - ib = a + ib \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in A_{\mathbb{R}}.$$

■

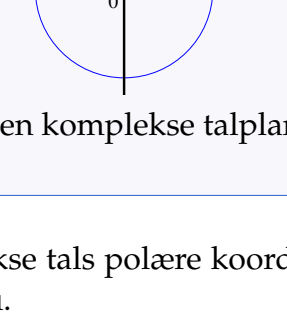
29.5 Polære koordinater

Den oplagte måde at angive et punkt i et sædvanligt (x, y) -koordinatsystem på, er naturligvis punktets retvinklede koordinater. I mange situationer er det imidlertid nyttigt at kunne bestemme et punkt ved dets *polære koordinater*, som består af punktets afstand til Origo samt punktets *retningsvinkel* fra x -aksen til punktets stedvektor, idet den regnes positiv hvis den udmåles mod uret, og negativ hvis den udmåles med uret.

I det følgende indfører vi på tilsvarende vis polære koordinater for komplekse tal. Lad os først præcisere en orientering af den komplekse talplan:



Orientering af den komplekse talplan fastlægges ved at en cirkel med centrum i tallet 0 gennemløbes *mod uret*.



Figur 29.4: Den komplekse talplans orientering

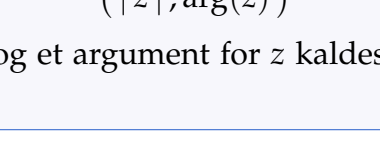
Ingredienserne i det komplekse tals polære koordinater er dets *absolutværdi* og *argument*. Dem indfører vi nu.



Givet et komplekst tal z .

Ved *absolutværdien* af z forstås længden af den til z hørende stedvektor. Absolutværdien skrives $|z|$ og kaldes også for tallets *modulus* eller *numeriske værdi*.

Antag $z \neq 0$. Enhver vinkel fra realaksens positive del til stedvektoren for z kaldes et *argument* for z og betegnes $\arg(z)$. Vinklen regnes med fortegn i overensstemmelse med orienteringen af den komplekse talplan.



Figur 29.5: Absolutværdi og argument

Et sammenhørende par

$$(|z|, \arg(z))$$

af absolutværdien af z og et argument for z kaldes for tallets *polære koordinater*.

Bemærk at argumentet for et tal z ikke er entydigt. Hvis man for eksempel til et valgt argument for z lægger vinklen 2π , opnår man igen en gyldig retningsvinkel for stedvektoren for z og dermed et nyt argument for tallet. Et komplekst tal har uendeligt mange argumenter.

Man kan imidlertid altid vælge et argument for z som ligger i intervallet fra $-\pi$ til π . Der er tradition for at give dette argument en fortrinsstilling. Det kaldes for tallets *hovedargument*.



Givet et komplekst tal z som ikke er 0. Ved *hovedargumentet* $\text{Arg}(z)$ for z forstås det entydigt bestemte argument for z som opfylder

$$\text{Arg}(z) \in]-\pi, \pi].$$

Vi vil nu se på hovedargumenterne for nogle specielle komplekse tal.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

Vi vil finde hovedargumenterne for de komplekse tal, der ligger på vinkelhalveringslinjerne mellem akserne i den komplekse talplan.

29.6 Geometrisk forståelse af de fire regnearter

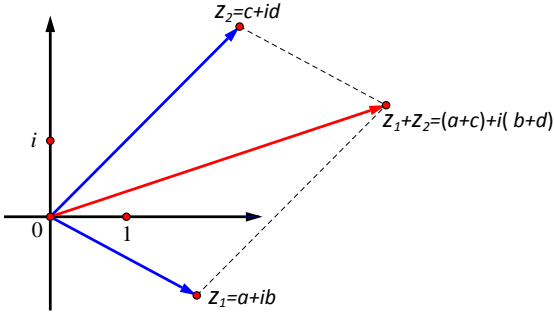
Vi startede med at indføre addition, subtraktion, multiplikation og division af komplekse tal som algebraiske operationer udført på reelle talpar (a, b) , se definitionerne 29.3, 29.5, 29.7 og 29.10. Derefter viste vi at de komplekse tals rektangulære form $a + ib$ fører til en mere praktisk måde at dyrke regnearterne på: Man kan regne med de komplekse tal på samme måde som de reelle, når blot tallet i behandles på samme måde som en reel parameter, og det udnyttes at $i^2 = -1$. I dette afsnit skal vi se at regneoperationerne også kan forstås som geometriske konstruktioner.

Den første præcise beskrivelse af de komplekse tal blev udarbejdet af den norske landmåler Caspar Wessel i 1796 . Wessel indførte komplekse tal som linjestykker med givne længder og retninger, altså det vi i dag kalder vektorer i planen. Regning med komplekse tal var derfor geometriske operationer udført på vektorer. I det følgende gengiver vi ideen i Wessels definitioner. Det er nemt at indse ækvivalensen mellem den algebraiske og geometriske repræsentation af addition og subtraktion, det kræver mere at forstå ækvivalensen for så vidt angår multiplikation og division.

||||

Addition af to komplekse tal z_1 og z_2 kan opnås geometrisk på følgende måde:

Stedvektoren for $z_1 + z_2$ er summen af stedvektorerne for z_1 og z_2 .

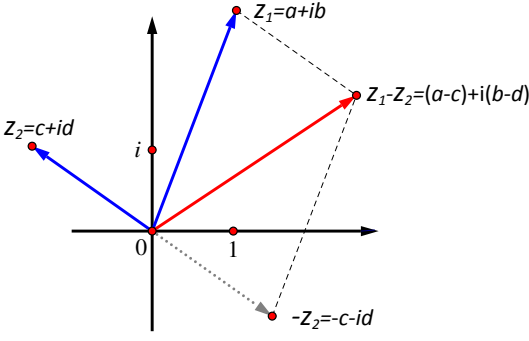


Figur 29.9: Addition ved parallelogram-metoden

||||

Antag at z_1 og z_2 er givet på rektangulær form ved $z_1 = a + ib$ og $z_2 = c + id$. Så har stedvektoren for z_1 koordinatsættet (a, b) og stedvektoren for z_2 koordinatsættet (c, d) . Summen af de to stedvektorer er dermed $(a + c, b + d)$, som er stedvektor for det komplekse tal $(a + c) + i(b + d)$. Da der algebraisk gælder $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$, er det ønskede vist. ■

Geometrisk subtraktion fås som en særlig form af geometrisk addition: Stedvektoren for $z_1 - z_2$ er summen af stedvektoren for z_1 og den modsatte vektor til stedvektoren for z_2 . Situationen er illustreret på figur 29.10.



Figur 29.10: Subtraktion ved parallelogram-metoden

Mens vi ved undersøgelsen af geometrisk addition (og subtraktion) har benyttet de komplekse tals rektangulære form, får vi ved geometrisk multiplikation (og division) brug for deres polære koordinater.

||||

Givet to komplekse tal z_1 og z_2 som begge er forskellige fra 0 (hvorved også $z_1 z_2 \neq 0$). Multiplikation af z_1 og z_2 kan opnås geometrisk på følgende måde:

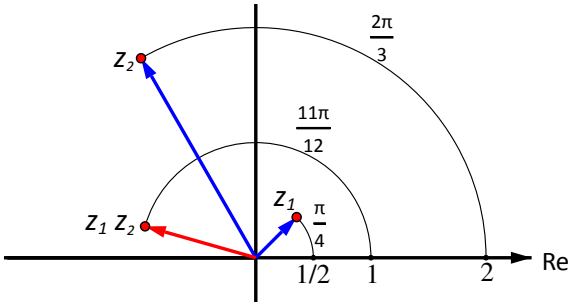
1. Absolutværdien for produktet $z_1 z_2$ fås når man ganger absolutværdien af z_1 med absolutværdien af z_2 .
2. Et argument for produktet af $z_1 z_2$ fås når man lægger et argument for z_1 sammen med et argument for z_2 .

||||

Første del af sætningen fremgår af sætning 29.31, mens anden del fremgår af sætning 29.34. ■

||||

To komplekse tal z_1 og z_2 er givet ved de polære koordinater $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4})$ henholdsvis $(2, \frac{2\pi}{3})$.



Figur 29.11: Multiplikation

Vi udregner produktet af z_1 og z_2 ved hjælp af deres absolutværdier og argumenter:

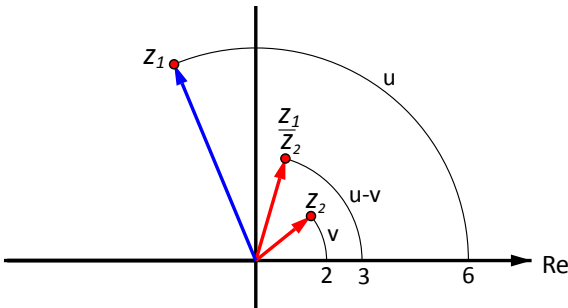
$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$$

Produktet $z_1 z_2$ er altså det komplekse tal som har absolutværdien 1 og argumentet $\frac{11\pi}{12}$.

||||

Tallene z_1 og z_2 er givet ved $|z_1| = 6$ og $\arg(z_1) = u$ henholdsvis $|z_2| = 2$ og $\arg(z_1) = v$.



Figur 29.12: Division

Derved kan $\frac{z_1}{z_2}$ bestemmes ved

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{6}{2} = 3 \text{ og } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = u - v.$$

29.7 Den komplekse eksponentialfunktion

Den sædvanlige eksponentialfunktion $x \mapsto e^x$, $x \in \mathbb{R}$ har som bekendt de karakteristiske egenskaber

1. $e^0 = 1$
2. $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
3. $(e^x)^n = e^{nx}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{R}$.

I dette afsnit vil vi indføre en særdeles nyttig udvidelse af den reelle eksponentialfunktion til en kompleks eksponentialfunktion, som viser sig at opfylde de samme regneregler som den reelle.

|||

Ved den komplekse eksponentialfunktion $\exp_{\mathbb{C}}$ forstås en funktion som til ethvert tal $z \in \mathbb{C}$ med rektangulær form $z = x + iy$ lader svarer tallet

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(x + iy) = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y)) \tag{29-23}$$

hvor e er grundtallet 2.7182818... for den reelle (naturlige) eksponentialfunktion.

Da vi for ethvert *reelt* tal x får

$$\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{C}}(x + i \cdot 0) = e^x (\cos(0) + i \sin(0)) = e^x,$$

ser vi at den komplekse eksponentialfuncton overalt på real-aksen er identisk med den reelle. Vi risikerer derfor ikke modstrid når vi i det følgende vil tillade (og flittigt bruge) skrivemåden

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = e^z \text{ for } z \in \mathbb{C}. \tag{29-24}$$

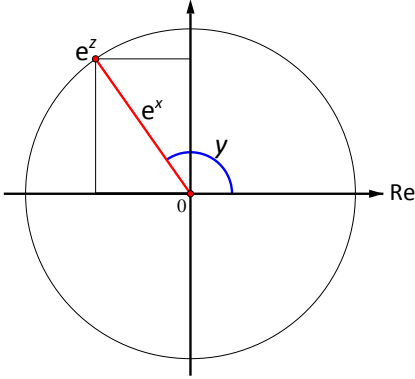
Vi betragter nu det komplekse tal e^z hvor z er et vilkårligt komplekst tal med rektangulær form $z = x + iy$. Der gælder da (med brug af sætning 29.31) at

$$|e^z| = |e^x (\cos(y) + i \sin(y))| = |e^x| |(\cos(y) + i \sin(y))| = |e^x| = e^x.$$

Endvidere gælder (med brug af sætning 29.34) at

$$\arg(e^z) = \arg(e^x) + \arg(\cos(y) + i \sin(y)) = 0 + y = y.$$

Disse pointer er illustreret i figur 29.13.



Figur 29.13: Geometrisk fortolkning af e^z

For de trigonometriske funktioner $\cos(x)$ og $\sin(x)$ vides at der for ethvert helt tal p gælder $\cos(x + p2\pi) = \cos(x)$ og $\sin(x + p2\pi) = \sin(x)$. Hvis man forskyder grafen for $\cos(x)$ eller $\sin(x)$ med et vilkårligt multiplum af 2π , vil den derfor gå over i sig selv. Funktionerne kaldes derfor *periodiske* med *perioden* 2π .

Et lignende fænomen kan ses ved den komplekse eksponentialfunktion. Den har den *imaginære* periode $i 2\pi$. Dette hænger i høj grad sammen med periodiciteten af de trigonometriske funktioner hvilket kan ses i beviset for den følgende sætning.

||| e^z

For ethvert komplekst tal z og ethvert helt tal p gælder

$$e^{z+i p2\pi} = e^z. \tag{29-25}$$

|||

Antag at z har rektangulær form $z = x + iy$ og $p \in \mathbb{Z}$.

Der gælder

$$\begin{aligned} e^{z+i p2\pi} &= e^{x+i(y+p2\pi)} \\ &= e^x (\cos(y + p2\pi) + i \sin(y + p2\pi)) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen vist. ■

I det følgende eksempel illustreres periodiciteten af den komplekse eksponentialfunktion.

|||

Bestem samtlige løsninger for ligningen

$$e^z = -\sqrt{3} + i. \tag{29-26}$$

Løsning:

Vi skriver først z på rektangulær form: $z = x + iy$. I eksempel 29.30 har vi fundet at højresiden i 29-26 har absolutværdien $|z| = 2$ og hovedargumentet $v = \frac{5\pi}{6}$. Da venstresiden og højresiden skal have samme absolutværdi og samme argument på nær et vilkårligt multiplum af 2π fås

$$|e^z| = e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2),$$

$$\arg(z) = y = v + p2\pi = \frac{5\pi}{6} + p2\pi, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Samtlige løsninger for 29-26 er dermed

$$z = x + iy = \ln(2) + i(\frac{5\pi}{6} + p2\pi), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Vi slutter afsnittet med at vise at den komplekse eksponentialfunktion opfylder de fra den reelle kendte regneregler.

|||

1. $e^0 = 1$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ for alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
3. $(e^z)^n = e^{nz}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{C}$.

|||

Er med i næste opdatering af eNoten. Additionsformlerne er afgørende. ■

|||

Vis at der for ethvert $z \in \mathbb{C}$ gælder $e^z \neq 0$.

29.8 Komplekse tals eksponentielle form

Lad v være et vilkårligt reelt tal. Indsættes det rent imaginære tal iv i den komplekse eksponentialfunktion fås af definition 29.41:

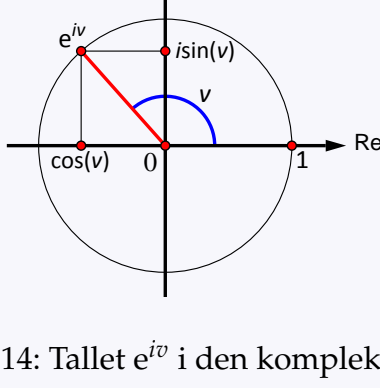
$$e^{iv} = e^{0+iv} = e^0 (\cos(v) + i \sin(v))$$

hvorved den berømte *Eulers formel* fremkommer



For ethvert $v \in \mathbb{R}$ gælder

$$e^{iv} = \cos(v) + i \sin(v). \quad (29-27)$$



Figur 29.14: Tallet e^{iv} i den komplekse talplan



Ved hjælp af definitionen på den komplekse eksponentialfunktion 29.41 udledte vi Eulers formel. Nu kan vi omvendt benytte Eulers formel til at opskrive den komplekse eksponentialfunktion på den bekvemme form

$$e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) = e^x e^{iy}. \quad (29-28)$$

De to mest brugte skrivemåder for komplekse tal i både teoretisk og anvendt matematik er rektangulær form (som vi har benyttet så ofte ovenfor), og *eksponentiel form*. I den eksponentielle form optræder tallets polære koordinater (absolutværdi og argument) i forbindelse med den komplekse eksponentialfunktion:



Ethvert komplekst tal $z \neq 0$ kan skrives på formen

$$z = |z| e^{iv} \quad (29-29)$$

hvor v er et argument for z . Skrivemåden kaldes tallets *eksponentielle form*.



Lad v være et argument for det komplekse tal $z \neq 0$, og sæt $r = |z|$. Vi viser at tallet re^{iv} har samme absolutværdi og argument som z , hvormed de to tal er ens:

1.
$$|re^{iv}| = |r| |e^{iv}| = r.$$
2. Da 0 er et argument for r og v et argument for e^{iv} , er $0 + v = v$ et argument for produktet re^{iv} .



En afgørende fordel ved den eksponentielle form af komplekse tal er at man ikke behøver tænke på regnereglerne for multiplikation, division og potensopløftning når tallenes polære koordinater benyttes, se sætning 29.31, følgesætning 29.32 og sætning 29.34. Alle udregninger kan nemlig udføres ved at man bruger de sædvanlige regneregler på tallenes eksponentielle form.

Vi giver nu et eksempel på multiplikation efter metode 29.48, sammenlign med eksempel 29.39.



To komplekse tal er givet på eksponentiel form:

$$z_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}i} \text{ og } z_2 = 2 e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Produktet af tallene fås på eksponentiel form ved

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{4}i}\right) (2 e^{\frac{3\pi}{2}i}) = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) e^{\frac{\pi}{4}i + \frac{3\pi}{2}i} = 1 e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})} = e^{\frac{7\pi}{4}i}.$$



Gør rede for at den i 29.48 indførte metode er korrekt.

I det følgende vil vi vise hvordan såkaldte *binome ligninger* kan løses ved hjælp af eksponentiel form. En binom ligning er en *toledet* ligning på formen

$$z^n = w \quad (29-30)$$

hvor $w \in \mathbb{C}$ og $n \in \mathbb{N}$.

Vi viser først et eksempel på løsning af en binom ligning ved hjælp af eksponentiel form og opstiller derefter den generelle metode.



Find samtlige løsninger på den binome ligning

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i. \quad (29-31)$$

Løsning:
Ideen er at vi skriver såvel z som højresiden på eksponentiel form.

Hvis z har den eksponentielle form $z = se^{iu}$, kan ligningens venstreside udregnes ved

$$z^4 = (se^{iu})^4 = s^4 (e^{iu})^4 = s^4 e^{i4u} \quad (29-32)$$

Højresidens absolutværdi r findes ved

$$r = |-8 + 8\sqrt{3}i| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16.$$

Højresidens argument v opfylder:

$$\cos(v) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \text{ og } \sin(v) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ved hjælp af de to ligninger kan højresidens hovedargument fastlægges til

$$v = \text{Arg}(-8 + 8\sqrt{3}i) = \frac{2\pi}{3},$$

og dermed den eksponentielle form

$$re^{iv} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}. \quad (29-33)$$

Vi indsætter nu (29-32) og (29-33) i (29-31)

$$s^4 e^{i4u} = 16e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Da ventresidens absolutværdi skal være lig højresidens får vi

$$s^4 = 16 \Leftrightarrow s = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Venstresidens argument $4u$ og højresidens argument $\frac{2\pi}{3}$ skal være ens på nær et multiplum af 2π . Heraf fås

$$4u = \frac{2\pi}{3} + p2\pi \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Disse uendeligt mange argumenter svarer vel at mærke kun til *fire* halvlinjer ud fra 0, bestemt ved de argumenter der fås ved $p = 0, p = 1, p = 2$ og $p = 3$. For alle andre værdier af p vil den tilsvarende halvlinje være identisk med en af de fire nævnte. For eksempel vil halvlinjen for $p = 4$ være givet ved argumentet

$$u = \frac{\pi}{6} + 4\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

det vil sige samme halvlinje som svarer til $p = 0$, da forskellen på argumenterne er 2π .

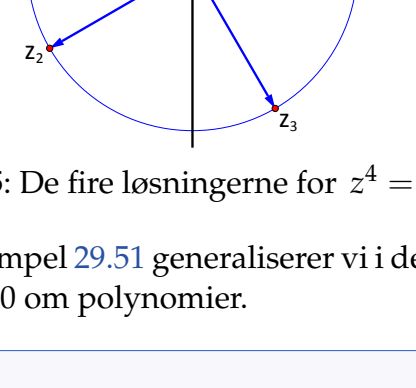
Den givne ligning (29-31) har derfor netop fire løsninger, som ligger på de nævnte fire halvlinjer i afstanden $s = 2$ fra 0. Angivet på eksponentiel form:

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + p\frac{\pi}{2})}, \quad p = 0, 1, 2, 3.$$

Eller omregnet hver for sig til rektangulær form ved brug af Eulers formel (29-27)

$$z_0 = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = -1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Alle løsningerne for en binom ligning ligger på en cirkel med centrum i 0 og radius lig med højresidens absolutværdi. Forbindelseslinjerne mellem Origo og løsningerne deler cirklen i lige store vinkler. Dette eksemplificeres på figur 29.15 der viser løsningerne på fjerdegradsligningen fra eksempel 29.51.



Figur 29.15: De fire løsninger for $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

Fremgangsmåden i eksempel 29.51 generaliserer vi i den følgende sætning. Sætningen bevises i eNote 30 om polynomier.



Givet et komplekst tal w , som ikke er 0, og som har den eksponentielle form

$$w = |w| e^{iv}.$$

Den binome ligning

$$z^n = w, \quad n \in \mathbb{N} \quad (29-34)$$

har n løsninger som kan findes ved formlen

$$z = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{v}{n} + p\frac{2\pi}{n})} \text{ hvor } p = 0, 1, \dots, n-1. \quad (29-35)$$



Lad r være et vilkårligt positivt reelt tal. Vis ved hjælp af sætning 29.52 at den binome andengradsligning

$$z^2 = -r$$

har to løsninger

$$z_0 = i\sqrt{r} \text{ og } z_1 = -i\sqrt{r}.$$

29.9 Første og andengradsligninger

Lad a og b være komplekse tal med $a \neq 0$. En førstegradsligning på formen

$$az = b$$

har ligesom den tilsvarende reelle førstegradsligning netop én løsning:

$$z = \frac{b}{a}.$$

Hvis a og b er på rektangulær form, finder man nemt en løsning på rektangulær form, som vist i det følgende eksempel.

||||

Ligningen

$$(1-i)z = (5+2i)$$

har løsningen

$$z = \frac{5+2i}{1-i} = \frac{(5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+7i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Også ved løsning af komplekse andengradsligninger benytter vi en formel der svarer til den velkendte løsningsformel for reelle andengradsligninger. I denne eNote indfører vi ikke kvadratrødder af komplekse tal, derfor afviger den komplekse løsningsformel der udledes nedenfor, i en enkelt detalje fra den sædvanlige reelle.

Ved en kompleks andengradsligning forstås en ligning på formen

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{29-36}$$

hvor a, b og c er komplekse tal med $a \neq 0$.

Vi indfører ligningens *diskriminant* D ved $D = b^2 - 4ac$. Lad w_0 være en vilkårlig løsning til den binome ligning $w^2 = D$ (der er to løsninger hvis $D \neq 0$ og kun nulløsningen hvis $D = 0$). Der gælder da:

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{w_0^2}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right) + \frac{w_0}{2a} \right) \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right) - \frac{w_0}{2a} \right) \\ &= a \left(z + \frac{b + w_0}{2a} \right) \left(z - \frac{b + w_0}{2a} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-b - w_0}{2a} \text{ eller } z = \frac{-b + w_0}{2a}. \end{aligned}$$

Heraf fås følgende sætning:

||||

Lad a, b og c være vilkårlige komplekse tal med $a \neq 0$. Vi sætter $D = b^2 - 4ac$. Andengradsligningen

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{29-37}$$

har to løsninger

$$z_0 = \frac{-b - w_0}{2a} \text{ og } z_1 = \frac{-b + w_0}{2a} \tag{29-38}$$

hvor w_0 er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D$.

Hvis specielt $D = 0$, gælder der $z_0 = z_1 = \frac{-b}{2a}$.

||||

Vi betragter en andengradsligning med reelle koefficienter

$$2z^2 + 5z - 3 = 0.$$

Ved sammenligning med formel (29-37) fås $a = 2, b = 5, c = -3$. Diskriminanten findes: $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49$. Det ses at $w_0 = 7$ er en løsning til den binome andengradsligning $w^2 = D = 49$. Nu kan løsningerne udregnes:

$$z_0 = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ og } z_1 = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 2} = -3. \tag{29-39}$$

||||

Vi betragter en andengradsligning med reelle koefficienter

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

Ved sammenligning med formel (29-37) fås $a = 1, b = -2, c = 5$. Diskriminanten findes: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5) = -16$. I følge opgave (29.53) fås en løsning for den binome andengradsligning $w^2 = D = -16$ ved $w_0 = i\sqrt{16} = 4i$. Nu kan løsningerne udregnes:

$$z_0 = \frac{-(-2) + 4i}{2 \cdot 1} = 1 + 2i \text{ og } z_1 = \frac{-(-2) - 4i}{2 \cdot 1} = 1 - 2i. \tag{29-40}$$

||||

Vi løser andengradsligningen

$$z^2 - (1+i)z - 2 + 2i = 0. \tag{29-41}$$

Ved sammenligning med formel (29-37) fås $a = 1, b = -1 - i, c = -2 + 2i$. Diskriminanten findes: $D = (-1 - i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2 + 2i) = 8 - 6i$. Da D ikke er reel må såvel realdel som imaginærværdi for en løsning til ligningen $w^2 = D = 8 - 6i$ være forskellige fra 0. Vi sætter $w = x + iy$ og betragter ligningen

$$w^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = D = 8 - 6i$$

som er ensbetydende med

$$x^2 - y^2 = 8 \text{ og } 2xy = -6.$$

Indsættes $y = \frac{-6}{2x} = -\frac{3}{x}$ i $x^2 - y^2 = 8$ og sættes $x^2 = u$ opnås andengradsligningen

$$u^2 - 8u - 9 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \text{ eller } u = 9.$$

For ligningen $x^2 = u = 9$ vælges løsningen $x_0 = 3$ hvoraf $y = -\frac{3}{x_0} = -1$.

Da $w_0 = x_0 + iy_0 = 3 - i$ er en løsning til $w^2 = D = 8 - 6i$ finder vi løsningerne for (29-41) ved

$$z_0 = \frac{(1+i) + (3-i)}{2 \cdot 1} = 2 \text{ og } z_1 = \frac{(1+i) - (3-i)}{2 \cdot 1} = -1 + i. \tag{29-42}$$

29.10 Komplekse funktioner af en reel variabel

Du bør bide godt mærke i funktioner af typen

$$f : t \mapsto e^{ct}, t \in \mathbb{R} \tag{29-43}$$

hvor c er et givet komplekst tal. De har vid udbredelse i såvel teoretisk som anvendt matematik. Et hovedformål med dette afsnit er at beskrive dem nærmere. De er eksempler på de såkaldte *komplekse funktioner af en reel variabel*. Vores undersøgelse starter bredt med denne større klasse af funktioner. Vi viser blandt andet hvordan begreber som differentiability og differentialkvotient kan overføres til dem. Derefter går vi dybdn med funktionstypen (29-43).



Ved en *kompleks funktion af en reel variabel* forstås en funktion f som til ethvert $t \in \mathbb{R}$ knytter ét komplekst tal som betegnes $f(t)$. En kort skrivemåde for en funtion f af denne type er

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}.$$

Lad os betragte en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Vi indfører to relle funktioner g og h ved

$$g(t) = \operatorname{Re}(f(t)) \quad \text{og} \quad h(t) = \operatorname{Im}(f(t))$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Herved kan f angives på *rektangulær form*:

$$f(t) = g(t) + i \cdot h(t), t \in \mathbb{R}. \tag{29-44}$$

Når vi i det følgende skal indføre differentiability for komplekse funktioner af en reel variabel, får vi brug for en speciel type af dem, nemlig de såkalde *epsilonfunktioner*. I lighed med *reelle* epsilonfunktioner er det hjælpefunktioner, hvis funktionsudtryk man som regel ikke er interesseret i. De to afgørende egenskaber for en reel epsilon-funktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ er at den opfylder $\epsilon(0) = 0$, og $\epsilon(t) \rightarrow 0$ når $t \rightarrow 0$. De komplekse indføres på tilsvarende vis.



Ved en *kompleks epsilonfunktion af en reel variabel* forstås en funktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ som opfylder

1. $\epsilon(0) = 0$

2. $|\epsilon(t)| \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$

I det følgende eksempel vises et par komplekse epsilon-funtioner af reel variabel.



Funktionen

$$t \mapsto i \sin(t), t \in \mathbb{R}$$

er en epsilonfunktion. Det ses af

$$|i \sin(t)| = |i| |\sin(t)| = |\sin(t)| \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow 0.$$

Også funktionen

$$t \mapsto t + it, t \in \mathbb{R}$$

er en epsilonfunktion, idet

$$|t + it| = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}|t| \rightarrow 0 \text{ for } t \rightarrow 0.$$

Vi er nu rede til af indføre begrebet differentiability for komplekse funktioner af en reel variabel.



En funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ kaldes *differentiable* i $t_0 \in \mathbb{R}$ hvis der findes en konstant $c \in \mathbb{C}$ og en epsilon-funktion $\epsilon : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ sådan at

$$f(t) = f(t_0) + c(t - t_0) + \epsilon(t - t_0)(t - t_0), t \in \mathbb{R}. \tag{29-45}$$

Hvis f er differentiable i t_0 , kaldes c for *differentialkvotienten* for f i t_0 .

Hvis f er differentiable i ethvert t_0 i et åbent interval I , kaldes f for *differentiable* på I .

Differentiability for en kompleks funktion af en reel variabel hænger nøje sammen med differentiability for de to reelle funktioner der indgår i dens rektangulære form. Det viser vi nu.



For en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ med rektangulær form $f(t) = g(t) + ih(t)$ og et komplekst tal c med rektangulær form $c = a + ib$ gælder:

f er differentiable i $t_0 \in \mathbb{R}$ med

$$f'(t_0) = c$$

hvis og kun hvis g og h er differentiable i t_0 med

$$g'(t_0) = a \quad \text{og} \quad h'(t_0) = b.$$



Antag først at f er differentiable i t_0 og $f'(t_0) = a + ib$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$. Så findes der en epsilon-funktion ϵ sådan at f for ethvert t kan skrives på formen

$$f(t) = f(t_0) + (a + ib)(t - t_0) + \epsilon(t - t_0)(t - t_0).$$

Vi omskriver såvel ventre- som højresiden til rektangulær form

$$\begin{aligned} g(t) + ih(t) &= g(t_0) + ih(t_0) + a(t - t_0) + ib(t - t_0) + \operatorname{Re}(\epsilon(t - t_0)) + i\operatorname{Im}(\epsilon(t - t_0)) \\ &= (g(t_0) + a(t - t_0) + \operatorname{Re}(\epsilon(t - t_0))) + i(h(t_0) + b(t - t_0) + \operatorname{Im}(\epsilon(t - t_0))). \end{aligned}$$

Heraf fås

$$g(t) = g(t_0) + a(t - t_0) + \operatorname{Re}(\epsilon(t - t_0)) \quad \text{og} \quad h(t) = h(t_0) + b(t - t_0) + \operatorname{Im}(\epsilon(t - t_0)).$$

For at kunne konkludere at g og h er differentiable i t_0 med $g'(t_0) = a$ og $h'(t_0) = b$, mangler vi blot at vise at $\operatorname{Re}(\epsilon)$ og $\operatorname{Im}(\epsilon)$ er reelle epsilonfunktioner. Dette følger af

1. $\epsilon(0) = \operatorname{Re}(\epsilon(0)) + i\operatorname{Im}(\epsilon(0)) = 0$ medfører at $\operatorname{Re}(\epsilon(0)) = 0$ og $\operatorname{Im}(\epsilon(0)) = 0$, og
2. $|\epsilon(t)| = |\operatorname{Re}(\epsilon(t))|^2 + |\operatorname{Im}(\epsilon(t))|^2 \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$ medfører at $\operatorname{Re}(\epsilon(t)) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$ og $\operatorname{Im}(\epsilon(t)) \rightarrow 0$ for $t \rightarrow 0$.

Den omvendte påstand i sætningen vises på tilsvarende vis. ■



Ved udtrykket

$$f(t) = t + it^2$$

er der defineret en funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. Da realdelen af f har den afledede funktion 1 og imaginærdelen af f den afledede $2t$ får vi af sætning 29.63

$$f'(t) = 1 + i2t, t \in \mathbb{R}.$$



Betragt funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$. givet ved

$$f(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t), t \in \mathbb{R}.$$

Da $\cos'(t) = -\sin(t)$ og $\sin'(t) = \cos(t)$, ses af sætning 29.63

$$f'(t) = -\sin(t) + i \cos(t), t \in \mathbb{R}.$$

I den følgende sætning betragter vi de såkaldte *lineære* egenskaber ved differentiation.



Lad f_1 og f_2 være differentiable komplekse funktioner af en reel variabel, og lad c være et vilkårligt komplekst tal. Der gælder da

1. Funktionen $f_1 + f_2$ er differentiable med differentialkvotienten

$$(f_1 + f_2)'(t) = f_1'(t) + f_2'(t). \tag{29-46}$$

2. Funktionen $c \cdot f_1$ er differentiable med differentialkvotienten

$$(c \cdot f_1)'(t) = c \cdot f_1'(t). \tag{29-47}$$



Lad $f_1(t) = g_1(t) + ih_1(t)$ og $f_2(t) = g_2(t) + ih_2(t)$ hvor g_1, h_1, g_2 og h_2 er differentiable reelle funktioner. Lad endvidere $c = a + ib$ være et vilkårligt komplekst tal på rektangulær form.

Sætningens første del:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(t) &= f_1(t) + f_2(t) = g_1(t) + ih_1(t) + g_2(t) + ih_2(t) \\ &= (g_1(t) + g_2(t)) + i(h_1(t) + h_2(t)). \end{aligned}$$

Vi får da fra sætning 29.63 og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)'(t) &= (g_1 + g_2)'(t) + i(h_1 + h_2)'(t) \\ &= (g_1'(t) + g_2'(t)) + i(h_1'(t) + h_2'(t)) \\ &= (g_1'(t) + ih_1'(t)) + i(g_2'(t) + ih_2'(t)) \\ &= f_1'(t) + f_2'(t). \end{aligned}$$

Sætningens anden del:

$$\begin{aligned} c \cdot f_1(t) &= (a + ib) \cdot (g_1(t) + ih_1(t)) \\ &= (a g_1(t) - b h_1(t)) + i(a h_1(t) + b g_1(t)) \end{aligned}$$

Vi får fra sætning 29.63 og brug af regneregler for differentialkvotienter af reelle funktioner:

$$\begin{aligned} (c \cdot f_1)'(t) &= (a g_1 - b h_1)'(t) + i(a h_1 + b g_1)'(t) \\ &= (a g_1'(t) - b h_1'(t)) + i(a h_1'(t) + b g_1'(t)) \\ &= (a + ib)(g_1'(t) + ih_1'(t)) \\ &= c \cdot f_1'(t). \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ■



Vis at hvis f_1 og f_2 er differentiable komplekse funktioner af en reel variabel, så er funktionen $f_1 - f_2$ differentiable med differentialkvotienten

$$(f_1 - f_2)'(t) = f_1'(t) - f_2'(t). \tag{29-48}$$

Vi vender nu tilbage til funktioner af typen (29-43). Først giver vi et nyttigt resultat om deres konjugering:



For et vilkårligt komplekst tal c og ethvert reelt tal t gælder

$$\overline{e^{ct}} = e^{\bar{c}t}. \tag{29-49}$$



Lad $c = a + ib$ være den rektangulære form af c . Vi får da ved brug af definition 29.41 og regneregler 29.23 for konjugering:

$$\begin{aligned} \overline{e^{ct}} &= \overline{e^{at+ibt}} \\ &= \overline{e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt))} \\ &= e^{at} \overline{(\cos(bt) + i \sin(bt))} \\ &= e^{at}(\cos(bt) - i \sin(bt)) \\ &= e^{at}(\cos(-bt) + i \sin(-bt)) \\ &= e^{at-ibt} \\ &= e^{\bar{c}t}. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ■

Hvis c i sætning 29.69 er reel, udtrykker (29-52) naturligvis blot sædvanlig differentiation af den reelle eksponentialfunktion som i (29-50). Også hvad differentiation angår er den komplekse eksponentialfunktion af en reel variabel dermed en udvidelse af den reelle.



Lad c 's rektangulære form være $c = a + ib$. Vi får da:

$$\begin{aligned} e^{ct} &= e^{at+ibt} \\ &= e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= e^{at}\cos(bt) + i(e^{at}\sin(bt)). \end{aligned}$$

Vi har altså

$$f(t) = g(t) + ih(t) \quad \text{hvor} \quad g(t) = e^{at}\cos(bt) \quad \text{og} \quad h(t) = e^{at}\sin(bt).$$

Da g og h er differentiable, er også f differentiable. Da endvidere

$$g'(t) = ae^{at}\cos(bt) - e^{at}b\sin(bt) \quad \text{og} \quad h'(t) = ae^{at}\sin(bt) + e^{at}b\cos(bt)$$

får vi nu

$$\begin{aligned} f'(t) &= ae^{at}\cos(bt) - e^{at}b\sin(bt) + i(ae^{at}\sin(bt) + e^{at}b\cos(bt)) \\ &= (a + ib)e^{at}(\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= (a + ib)e^{at+ibt} \\ &= ce^{ct}. \end{aligned}$$

Hermed er sætningen bevist. ■