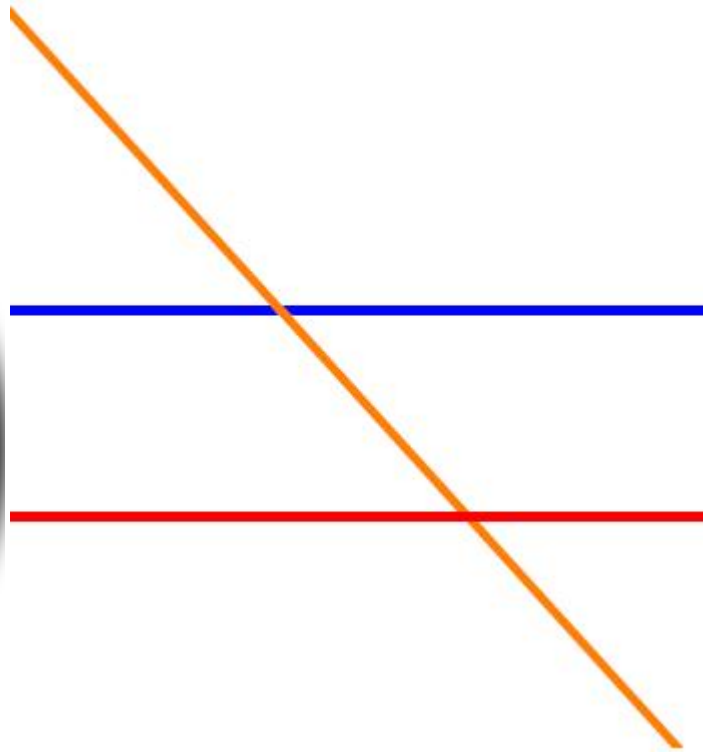
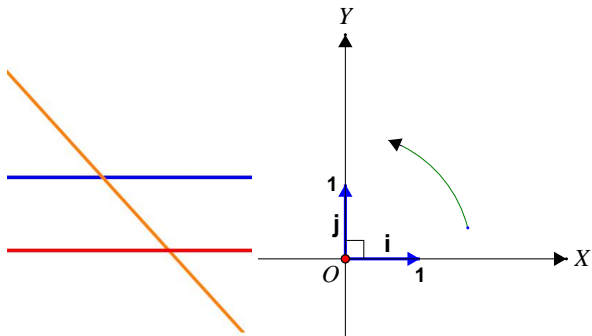
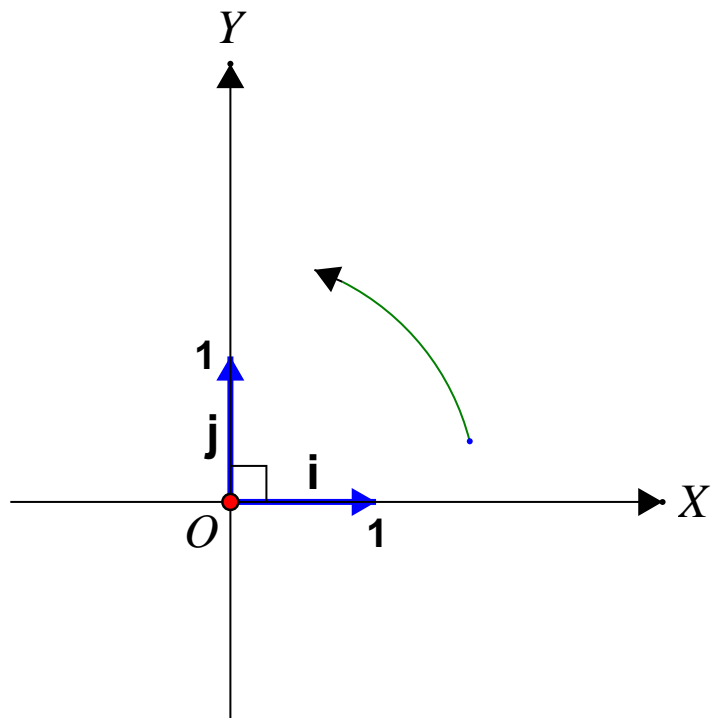




Lorem Ipsum Dolor 1

BILLEDER:





Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec dolor nibh, facilisis non a² + b² = c² semper at, ullamcorper ultrices felis. Aliquam ut dui diam. Cras porta posuere dolor vitae laoreet. In eu sem purus.

999.1 Donec dolor nib

En *lineær ligning* med n ubekendte er en ligning af formen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b. \quad (999-1)$$

Tallene a_1, a_2, \dots, a_n kaldes *koefficienterne* og tallet b kaldes *højresiden*. Koefficienterne og højresiden betragtes som kendte tal, mens x_1, x_2, \dots, x_n er de ubekendte. Ligningen kaldes *homogen*, hvis $b = 0$, ellers *inhomogen*.

|||| Eksempel 999.1 Hello Newer World!

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (999-2)$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en *triviel* ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en *inkonsistent* ligning, som ingen løsninger har, det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1. \quad (999-3)$$

|||| Opgave 999.2

En lineær ligning er givet ved

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \quad (999-4)$$

Angiv løsningsmængden for ligningen på standard-parameterform.

|||| Bevis

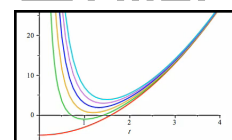
Første del af beviset for sætning 999.4 er enkelt: Da løsningsmængden for et ligningssystem er identisk med *fællesmængden* F af løsningsmængderne til hver af de ligninger der indgår i systemet, ændres F naturligvis ikke ved at ligningernes rækkefølge ændres, derfor er ro_1 tilladt.

De to næste rækkeoperationer kan forklares ud fra sædvanlige *omformningsregler* for én

ligning:

Da en lignings løsningsmængde ikke ændres ved at den ganges med en konstant $k \neq 0$, vil F ikke kunne påvirkes af at en ligning erstattes af ligningen ganget med en konstant forskellig fra 0. Derfor er ro_2 tilladt.

Lad os til sidst kalde de to ligninger som ro_3 handler om, for henholdsvis a og b . Ved at gange b med en konstant opnår vi en ny ligning b_2 der har samme løsningsmængde som b , vi har jo blot benyttet ro_2 . Når vi derefter lægger venstresiden af b_2 til venstresiden af a og derefter højresiden af b_2 til højresiden af a , opnår vi en ny ligning a_2 . Hvis et vilkårligt talsæt x tilhører løsningsmængden for b og dermed for b_2 , så vil x tilhøre løsningsmængden for a_2 netop når x tilhører løsningsmængden for a . Derfor ændres F ikke ved at a erstattes af a_2 i ligningssystemet, hvorfor ro_3 er tilladt.



■

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Donec dolor nibh, facilisis non semper at, ullamcorper ultrices felis. Aliquam ut dui diam. Cras porta posuere dolor vitae laoreet. In eu sem purus. Vestibulum at sem est, vel adipiscing sapien. Mauris non erat sed arcu egestas dignissim eu id turpis.

AB23CD: Animeret illustration af beviset

||| Definition 999.3

Ved en *løsning* til ligningen

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b. \quad (999-5)$$

forstås et talsæt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ der ved indsættelse i ligningen får den til at passe, det vil sige at venstresiden er lig med højresiden.

Ved *den fuldstændige løsning* eller blot *løsningsmængden* forstås alle tænkelige løsninger til ligningen samlet i én mængde.

|||| Sætning 999.4

Man ændrer ikke på et lineært ligningssystems løsningsmængde hvis man omformer ligningssystemet ved en af de følgende tre *rækkeoperationer*:

ro₁: Lader to af ligningerne bytte række.

ro₂: Ganger en af ligningerne med en konstant som ikke er 0.

ro₃: Til en ligning lægger en konstant ganget en af de øvrige ligninger.

|||| Hjælpesætning 999.5

En lineær ligning er givet ved

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \quad (999-6)$$

Angiv løsningsmængden for ligningen på standard-parameterform.

|||| Følgesætning 999.6

Vi fastlægger her en kort notation for hver af de tre rækkeoperationer:

ro₁: $R_i \leftrightarrow R_j$: Ligningen i række i ombyttes med ligningen i række j .

ro₂: $k \cdot R_i$: Ligningen i række i ganges med k .

ro₃: $R_j + k \cdot R_i$: Til ligningen i række j lægges k ganget ligningen i række i .

|||| Metode 999.7

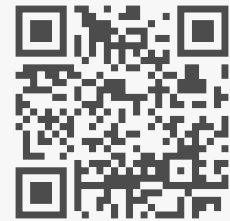
$$\begin{array}{rcl} 1 + 1 + 2 \cdot 2 - 6 = 0 & & 0 = 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 - 2 - 6 = 0 & \Leftrightarrow & -7 = 0 \end{array} \quad (999-7)$$

In vitae ipsum eget diam pretium sodales. Curabitur placerat arcu quis tellus ullamcorper facilisis. Maecenas nibh nisl, convallis consequat pellentesque non, dignissim auctor purus. Pellentesque diam est, sollicitudin vitae ultricies vitae, eleifend quis leo. Cras eget convallis odio. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.

|||| Forklaring 999.8

In vitae ipsum eget diam pretium sodales. Curabitur placerat arcu quis tellus ullamcorper facilisis. Maecenas nibh nisl, convallis consequat pellentesque non, dignissim auctor purus.

$$\mathbf{T} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (999-8)$$



AB23CD: Video case story

Pellentesque diam est, sollicitudin vitae ultricies vitae, eleifend quis leo. Cras eget convallis odio. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.

Quisque diam libero, dictum vel bibendum quis, fringilla a sapien. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce lobortis molestie mi, vel dictum turpis adipiscing id. Morbi commodo mattis tempor. Phasellus nisi elit, tempus eu bibendum ut, feugiat eget purus.

$$\begin{array}{rcl} -x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = & 9 \end{array} \quad (999-9)$$

|||| Bemærkning 999.9

In vitae ipsum eget diam pretium sodales. Curabitur placerat arcu quis tellus ullamcorper facilisis. Maecenas nibh nisl, convallis consequat pellentesque non, dignissim auctor purus.

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned} \quad (999-10)$$

Pellentesque diam est, sollicitudin vitae ultricies vitae, eleifend quis leo. Cras eget convallis odio. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus.

$$R_3 - 3 \cdot R_1 :$$

Nam sit amet est nec sapien facilisis iaculis vel et ligula. Suspendisse varius elementum ornare. Sed at arcu vel nisl vulputate sollicitudin nec ut magna. Vestibulum leo nibh, iaculis vel pharetra vitae, placerat eu tortor. Aliquam non metus ac tortor pharetra lacinia vitae at dui. Morbi in ante eget elit feugiat posuere at eu magna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis vitae lorem nunc. Quisque diam libero, dictum vel bibendum quis, fringilla a sapien. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce lobortis molestie mi, vel dictum turpis adipiscing id. Morbi commodo mattis tempor. Phasellus nisi elit, tempus eu bibendum ut, feugiat eget purus.

999.2 Reduktion af lineære ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan reduceres, dvs. gøres enklere, ved hjælp af en metode der kaldes Gauss-elimination. Metoden har flere forskellige varianter, og den særlige variant der benyttes i disse noter, går under navnet *GaussJordan-elimination*. Det algebraiske grundlag for alle varianterne er at man kan omforme et lineært ligningssystem ved såkaldte *rækkeoperationer* uden at man derved ændrer på ligningssystemets løsningsmængde. Når ligningssystemet er reduceret mest muligt, er det som regel nemt aflæse og opstille dets løsningsmængde.



$$R_3 - 3 \cdot R_1 :$$

Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



$$(-1) \cdot R_2 :$$

Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



$$(-1) \cdot R_2 :$$

Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



$$(-1) \cdot R_2 :$$

Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).

Nam sit amet est nec sapien facilisis iaculis vel et ligula. Suspendisse varius elementum ornare. Sed at arcu vel nisl vulputate sollicitudin nec ut magna. Vestibulum leo nibh, ia-

culis vel pharetra vitae, placerat eu tortor. Aliquam non metus ac tortor pharetra lacinia vitae at dui. Morbi in ante eget elit feugiat posuere at eu magna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis vitae lorem nunc. Quisque diam libero, dictum vel bibendum quis, fringilla a sapien. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce lobortis molestie mi, vel dictum turpis adipiscing id. Morbi commodo mattis tempor. Phasellus nisi elit, tempus eu bibendum ut, feugiat eget purus.

$$(-1) \cdot R_2 : \quad (999-11)$$

$$(-1) \cdot R_2 : \quad (999-12)$$

$$(-1) \cdot R_2 : \quad (999-13)$$

$$(-1) \cdot R_2 : \quad (999-14)$$

999.3 Nam sit amet

Nam sit amet est nec sapien facilisis iaculis vel et ligula. Suspendisse varius elementum ornare. Sed at arcu vel nisl vulputate sollicitudin nec ut magna. Vestibulum leo nibh, iaculis vel pharetra vitae, placerat eu tortor. Aliquam non metus ac tortor pharetra lacinia vitae at dui. Morbi in ante eget elit feugiat posuere at eu magna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis vitae lorem nunc. Quisque diam libero, dictum vel bibendum quis, fringilla a sapien. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce lobortis molestie mi, vel dictum turpis adipiscing id. Morbi commodo mattis tempor. Phasellus nisi elit, tempus eu bibendum ut, feugiat eget purus.

999.3.1 Aliquam non metus

Aliquam non metus ac tortor pharetra lacinia vitae at dui. Morbi in ante eget elit feugiat posuere at eu magna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Duis vitae lorem nunc. Quisque diam libero, dictum vel bibendum quis, fringilla a sapien. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Fusce lobortis molestie mi, vel dictum turpis adipiscing id. Morbi commodo mattis tempor. Phasellus nisi elit, tempus eu bibendum ut, feugiat eget purus.

999.3.2 Fusce lobortis molestie

||| Sætning 999.10

En lineær ligning er givet ved

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \quad (999-15)$$

Angiv løsningsmængden for ligningen på standard-parameterform.



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).

Nam sit amet est nec sapien facilisis iaculis vel et ligula. Suspendisse varius elementum ornare. Sed at arcu vel nisl vulputate sollicitudin nec ut magna. Vestibulum leo nibh, iaculis vel pharetra vitae, placerat eu tortor. Aliquam non metus ac tortor pharetra lacinia vitae at dui. Morbi in ante eget elit feugiat posuere at eu magna. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes,



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).



Hvis vi opfatter ligning (999.13) som ligningen for en plan i rummet, så angiver ligning (999.2) en *parameterfremstilling* for den samme plan, hvor første søjlevektor på højresiden angiver *begyndelsespunktet* på planen, og de to sidste søjlevektorer er *retningsvektorer*. (Her: REFERENCE til transfernøte om geometriske vektorer).

$$(-1) \cdot R_2 : \quad (999-16)$$

|||| Eksempel 999.11

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (999-17)$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en *triviel* ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en *inkonsistent* ligning, som ingen løsninger har, det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1. \quad (999-18)$$

|||| Eksempel 999.12

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (999-19)$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en *triviel* ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.



AB23CD: Guided videoeksempel

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en *inkonsistent* ligning, som ingen løsninger har, det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1. \quad (999-20)$$

|||| Eksempel 999.13

Den lineære ligning

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \quad (999-21)$$

hvor alle koefficienterne samt højresiden er 0, er et eksempel på en *triviel* ligning. Ligningens løsningsmængde består af alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Hvis alle ligningens koefficienter er 0, men højresiden er forskellig fra 0, opstår en *inkonsistent* ligning, som ingen løsninger har, det gælder fx ligningen

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1. \quad (999-22)$$

999.4 Opsummering

asdf