

|||| eNote 3

Kvadratisk ligninger

|||| Eksempel 3.1

Givet er den kvadratiske ligning

$$29x_1^2 + 36x_2^2 + 24x_1x_2 - 152x_1 - 336x_2 = -620. \quad (3-1)$$

Vi vil prøve at finde ud af, hvilket keglesnit, denne ligning repræsenterer og desuden bestemme dens egenskaber. I første omgang omskrives ligningen, og en symmetrisk matrix introduceres.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -620 \Leftrightarrow \\ \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \mathbf{x} = -620 \end{aligned} \quad (3-2)$$

Matricen \mathbf{A} er, som det ses, netop symmetrisk og det er derfor muligt at diagonalisere den og derved skifte til en ortonormal basis. \mathbf{A} har egenverdierne $\lambda_1 = 20$ og $\lambda_2 = 45$ med de respektive egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (-4, 3)$ og $\mathbf{v}_2 = (3, 4)$. Det ses at $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$ og vi skal derfor kun normalisere vektorerne for at danne en ortogonal matrix. De har begge længden 5 og vi får da

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}. \quad (3-3)$$

Ved at danne $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$, hvor $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, er det muligt at omskrive ligning 3-2:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T \mathbf{A} \mathbf{Q}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{y} &= -620 \Leftrightarrow \\ \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{y} &= -620 \Leftrightarrow \\ \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{y} &= -620, \end{aligned} \quad (3-4)$$

hvor $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \text{diag}(20, 45)$. Udskrives ligningen nu, vil der ikke være et koblingsled mellem første- og andenkoordinaten i \mathbf{y} , fordi $\mathbf{\Lambda}$ er en diagonalmatrix. Det burde derfor

nu være muligt at omskrive den kvadratiske ligning til dens standardform.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -152 & -336 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -620 \Leftrightarrow \\ 20y_1^2 + 45y_2^2 - 80y_1 - 360y_2 = -620 \end{aligned} \quad (3-5)$$

Ved hjælp af kvadratsætningerne kan dette omskrives:

$$\begin{aligned} 20(y_1 - 2)^2 - 20 \cdot 2^2 + 45(y_2 - 4)^2 - 45 \cdot 4^2 &= -620 \Leftrightarrow \\ 20(y_1 - 2)^2 + 45(y_2 - 4)^2 &= 180 \Leftrightarrow \\ \frac{(y_1 - 2)^2}{3^2} + \frac{(y_2 - 4)^2}{2^2} &= 1 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (3-6)$$

Dette er standardformen af en ellipse med halvakserne 3 og 2 og centrum i ${}_y\mathbf{c} = (2, 4)$. I de oprindelige koordinater er centrum givet ved

$${}_x\mathbf{c} = \mathbf{Q} \cdot {}_y\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 22/5 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$